中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本



球面三角學

Ф. Ф. 巴甫洛夫, В. П. 馬希克維奇著
劉亞星譯

商務印書館



本書係根據蘇聯煤炭工業出版社(Углетехиздат)出版的巴甫洛夫(Ф. Ф. Павлов)和馬希克維奇(В. П. Машкевич)合著的"球面三角學"(Сферическая тригонометрия)1951年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等學校鑛山測量專業教學參考書。

球 面 三 角 學

劉 亞 星 譯

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司 總經售

商務印書館北京廠 印 刷

(51116)

1953年10月初版 版面字數82,000

印數1—5,000 定價¥6,200

目　　錄

第一編　球面幾何

第二編　球面三角

球面三角學

緒言

球面三角是數學的一個分科，，研究球面上由大圓弧構成的三角形的解法。

球面三角有重要的理論上和實用上的價值，並且在天文學、高等測量學、製圖學、結晶學、鑛山幾何學、儀器學及其他科學各方面有廣泛的應用，只要是需要應用補助球來研究點、線、面在空間中的相互位置時，都必須用到球面三角。

歷史介紹

球面三角出現在古代東方國家並在那裏獲得初步發展。

在古代已有巨大發展的天文學促進了這門科學的發展，由於天文學的發展，三角學首先是以球面三角的形式出現的，以後平面三角始作爲球面三角的特殊情形而出現。

球面和平面三角的創始人一般認爲是希臘學者吉巴爾哈，他於紀元前 180—125 年生活於亞歷山大里亞。

希臘學者在球面三角領域中有貢獻的還有的黎波里的狄奧多西、門涅賴和托勒密。

以後在印度人以及特別在阿剌伯人和中亞細亞人〔阿布-瓦法、納西爾·愛丁以及曾在撒馬爾罕工作過一段時間的阿爾-巴丹(850—920)〕那裏球面三角以及平面三角獲得了新的發展。

納西爾·愛丁在自己的著作"關於四邊形的論文"中作出了關於球

面和平面三角的一般性總結工作。

以後球面三角的發展歸功於勒吉奥蒙且(1435—1476)、替荷-德-布拉格(1546—1610)、開普勒(1571—1630)等人。

十七世紀初對數的發明及詳細的三角函數及三角函數對數表的出版根本改進了球面三角的計算，而十八世紀數學分析的發展給與球面三角的公式以優美簡單的形式。

歐勒、拉格倫奇和高斯給與球面三角以現代的形式。

俄羅斯科學院院士歐勒(1707—1783)是現代球面三角的創始人，在這方面他有兩種重要著作："球面三角基礎"(1753)和"綜合球面三角學"(1779)。

歐勒球面三角形的特徵在於：1)球面三角形的每個邊和每個角都大於零而小於 π；2)假設球面上三點中的任兩點都不在同一直徑的兩端，則它們確定一個而且只確定一個球面三角形。

馬比阿斯(1846年)推廣球面三角形邊*和角的界限到 2π，這樣的球面三角形叫做馬比阿斯三角形。

關於球面角的更廣泛的毫無限制的概念是高斯、斯圖第以及特別是天才俄羅斯數學家羅巴契夫斯基(1793—1856)給出的。

Н. И. 羅巴契夫斯基在自己的著作"想像幾何學"(1835—1836)中給出了以下關於球面三角形邊和角的公式。

$$x' = p_x + q,$$

即

$$a = p_a a + q_a$$

$$\alpha' = p_a^\alpha + q_a$$

(對其餘兩邊和兩角有同樣的公式)。

我們知道的俄羅斯第一個球面三角的教程是西門·莫爾德維諾夫船長編著的，出版於1748年，在這裏球面三角是"航海全書"的一部分。

* 原書此處作三邊的和，按歐勒球面三角形三邊的和已可到達 2π，故此處當爲每邊的界限——譯者。

在序言中著者說了下面的話：

"爲此我有勇氣向親切的航海人員提出航海全書：根本上從幾何學開始，論及有幾何證明的球面和平面三角，論及天體和天文。"

1787 年彼得堡出版了一本不知作者姓名的"球面和平面三角學"。

同一年彼得堡出版了名叫依凡·高爾德也夫的乘艦練習生著的"布格洛夫航海新著作中事物的定義"。

在球面三角部分敍述了下列問題：

第一章"關於球面三角形中邊和角的比例"。

第二章"直角三角形解法"。

第三章"鈍角三角形的計算、等腰三角形、等邊三角形"。

每章都有習題。

以後球面三角在俄羅斯和蘇聯的發展是與天文和航海的進步同時，也是與這些科學傑出代表者的名字分不開的。

列寧格勒採鑛學院首任鑛山測量教研室主任 В. И. 巴吾曼教授和"坑藏幾何"創始人 П. К. 索巴列夫斯基教授注意到球面三角對鑛山測量的價值。他兩人都著有球面三角教科書，巴吾曼的書廣泛地流行於鑛山測量者中間，索巴列夫斯基的小册子以富於創造性著稱。

第一編　球面幾何

在着手研究球面三角以前，首先需要熟悉球面幾何的基本原理，而球面幾何是研究分佈在球面上的圖形的性質的。

§ 1　球面上的圓

在空間中與一個定點 O——球心（圖 1）——等距離的點的軌跡叫做球面。包圍在球面中的空間叫做球。換句話說球面可以定義為半圓周圍繞它的直徑的旋轉面。連接球心和球面上任意點的線段叫做球的半徑 R，而連接球面上兩點並且通過球心的線段叫做直徑；很明顯，同一個球的半徑相等，而直徑等於兩個半徑。

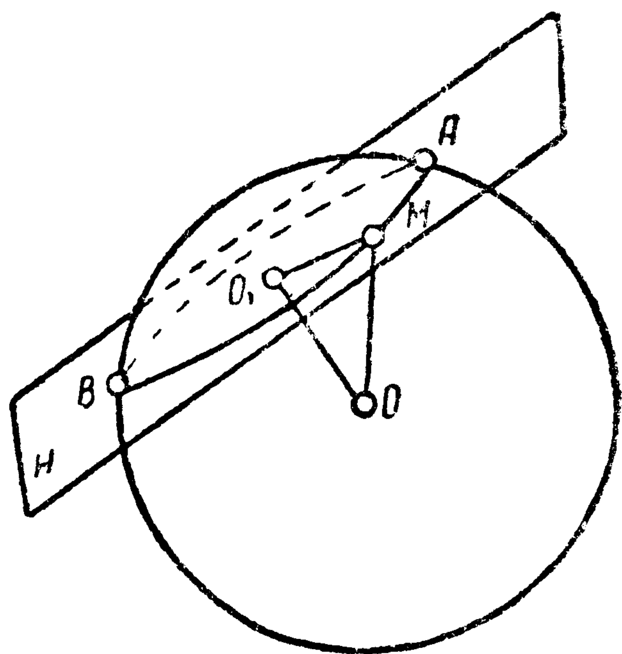


圖　1

在球面幾何的基礎中有以下定理：

定理 1　任意平面和球相截而成的截痕是圓（圖 1）。

假設，曲線 AMB 表示用平面 H 截半徑為 R 的球面所得的截痕。

從球心向平面 H 引垂線 $OO_1=d$ 並且在截線上取任意點 M；把它和 O 點、O_1 點連接起來，我們得到直角三角形 O_1OM；我們用 r 表示 O_1M，則

$$r=\sqrt{R^2-d^2}\cdots\cdots\quad\cdots\cdots(1)$$

因為當 M 點沿曲線 AMB 運動時 MO 和 OO_1 的長度不變因而 $MO_1=r$ 也是常數，而曲線上所有的點都在平面 H 上；所以，平面 H 和球面的交線是圓周，這個圓周叫做小圓。小圓可以互相交截，互相平行或互相傾斜。距球心相等的小圓有相等的半徑因而相等。

從等式(1)推出，當 $d=0$ 時截面通過球心 O 並且 $r=R$。在這種場合平面和球面的截痕叫做大圓。

定理 2　大圓分球和球面爲相等的兩部分。

用通過球心的平面截球，此時我們所得的是大圓；把一部分球翻轉，並且把它這樣嵌入第二部分中，使它們的底互相重合，因爲所有球面上的點距離球心都相等；所以一部分球面上所有的點都和第二部分球面上對應的點重合。所以，大圓分球和球面爲相等的兩部分。

定理 3　通過球面上不在同一直徑兩端上的兩個點，能作而僅能作一個大圓(圖2)。

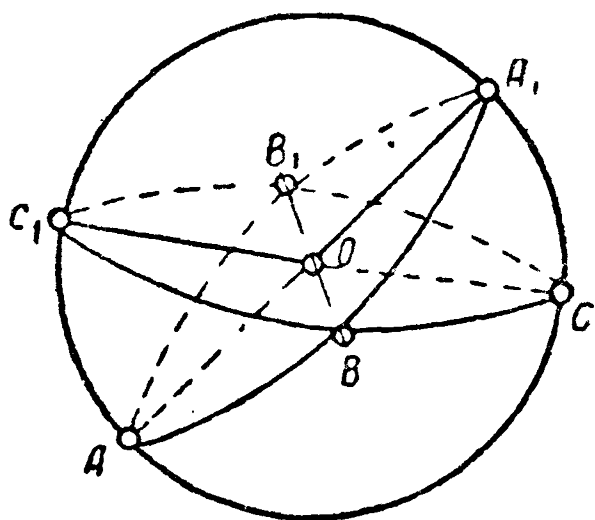


圖 2

取以 O 爲心的球面上的兩個點 A 和 B，這兩點不在同一個直徑的兩端上。因爲任意平面爲不在一條直線上的三個點所確定，所以通過 AOB 三點能作而僅能作一個平面，但因這個平面通過球心 O，所以，很明顯，它和球面的交線是大圓。

定理 4　兩個大圓的平面的交線是它們的直徑並且把它們平分。

因爲大圓 ABA_1 和 CBC_1 的平面通過圓心 O(圖 2)，所以 O 點同時在兩個大圓的平面上因而也在它們的交線上，也就是說直線 BB_1 同時是兩個圓的直徑並且平分圓周。

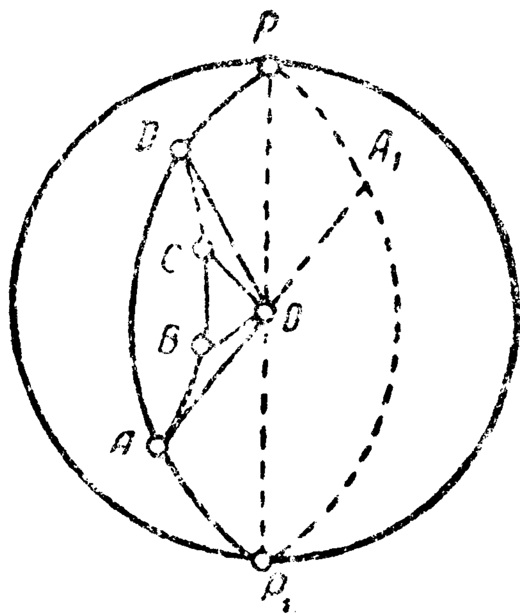


圖 3

定理 5　小於 $180°$ 的大圓弧(圖 3)是球面上兩點間的最短球面距離。

設 A 和 D 爲球面上不在同一直徑兩端的二點，則大圓 APA_1P_1[1] 的兩個圓弧中較短的一個叫做 AD 間的球面距離。

[1] 根據"歐勒約定"。

設A和A_1在一個直徑的兩端，則A和A_1間的球面距離等於大圓的一半。

爲了證明球面上兩點間的最短距離是大圓弧，我們通過A和D作大圓弧和曲線$ABCD$。以$B, C\cdots$等點分後一曲線爲無窮小的弧AB, $BC, CD\cdots$，使在極小的誤差範圍內可以認爲它們是大圓弧。把$ABCD\cdots$和球心O連接起來，我們得到多面角$OABCD$。平面角$\widehat{AOD} < \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD}\cdots$；用相等的弧代替中心角，我們得到$\breve{AD} < \breve{AB} + \breve{BC} + \breve{CD}$或$\breve{AD} < \breve{ABCD}$；如此，大圓在球面上就像直線在平面上一樣。

還有另一個證明，這個證明是根據下面的定理：大地線是任意曲面上兩點間的最短距離；所謂大地線是指具有這樣性質的曲線，即在這曲線任一點上曲面的法線和在這一點含於密切面內曲線自身的法線（即主法線）重合*。

在球面上（圖 4）取一點A並通過它作大圓弧和小圓弧，把A點和大圓心O連接起來，而O點同時也就是球心。

設O_1點是小圓心。球半徑AO是球面在A點的法線同時也是曲線PAP_1在A點的法線。因爲對大圓弧上任意點都是如此，所以大圓弧是大地線，因而也是球上的最短距離。對於小圓上的點情形就不同了；在這裏球面的法線AO不和曲線的主法線AO_1重合，所以小圓不是大地線因而也不是球面上兩點間的最短距離。

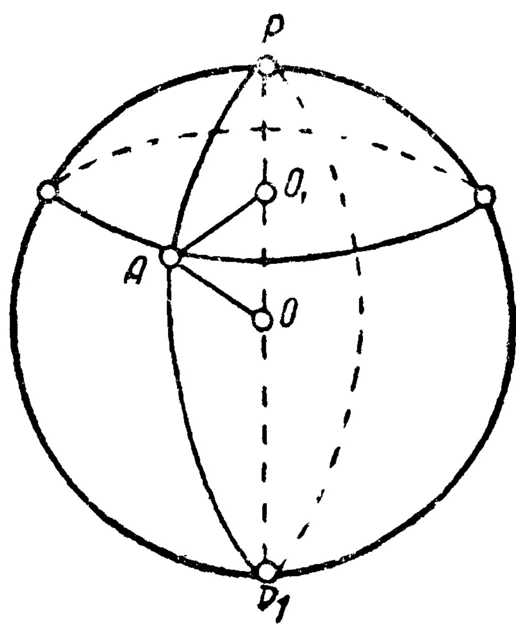


圖 4

§ 2　軸、極、極線、球面角及其度量

垂直於任意已知圓所在平面的球直徑叫做這個圓的軸。軸交球面

---

* 原書誤作"在這曲線任一點上，曲面的含於密切面內的法線，與曲線自身在此點的法線重合"。茲改正之——譯者。

於相反的兩點P和P_1，這兩點叫做極（圖 5）。

任意圓上所有的點，例如B_1、B_2、B_3、B_4，和這個圓的極P的距離都相等，即大圓弧PB_1、PB_2、PB_3、PB_4相等。極叫做小圓弧的球面中心。PB_1、PB_2等弧的長度叫做球面半徑；如果球面半徑等於$90°$則大圓弧叫做P和P_1點的極線。極是垂直於極線的大圓的交點。假設A_2, A_3或其他的點在P點的極線上，則$A_2P=90°$，但A_2自己又在A_1點的極線PA_2P_1上，所以大圓$PB_2A_2P_1$以及$PB_4A_4P_1$等和極線互相垂直。

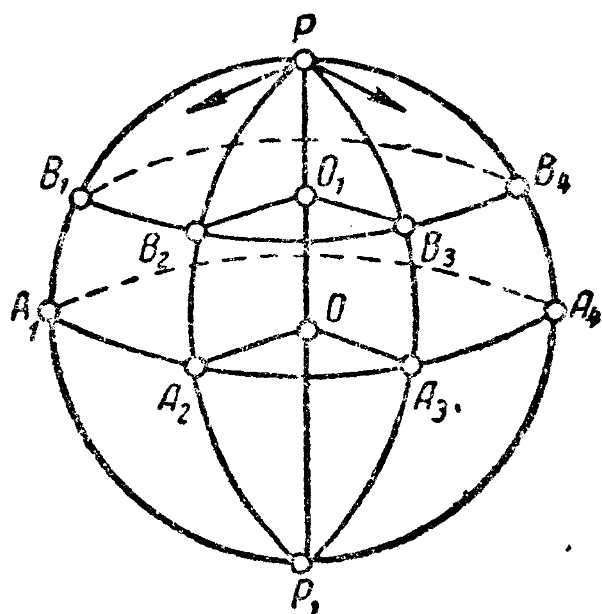


圖 5

球面角　大圓弧相交所成的角P和P_1（圖 5）叫做球面角。圓弧的交點叫做球面角的頂點，而圓弧叫做球面角的邊。設兩個圓弧A_2P和A_3P在P點相交；則角A_2PA_3叫做球面角，它的頂點是P而邊是PB_2和PB_3。球面角的度量有四種方法：1)用由平面POA_2和POA_3所構成的二面角來度量，2)用直線角A_2OA_3來度量，3)用弧A_2A_3來度量，此處A_2A_3是頂點P的極線，4)用在頂點P處切於球面角的邊的切線間的夾角來度量。

球面角，也像平面角一樣，可以是銳角、直角或鈍角並且它的值在從$0°$到$360°$之間。有一個公共邊而絲外兩邊是同一個弧的延長線的兩個球面角叫做互補。由於球面角可用直線角A_2OA_3來度量，我們有：1)兩個互補球面角的和等於$180°$，2)有一個公共頂點的所有球面角的和等於$360°$。

§ 3　球面坐標

球面上點的位置可用任意坐標系確定，但在天文學、測量學、結晶學、實用地質學中最常用的是球面——赤道和水平的坐標系。

a) 赤道坐標系

在球面上取一點 A 並通過 A 作大圓弧。以 A 點爲極作極線。把地球當作一個球，我們這樣轉動球面，使 A 點和地球的極 P 重合(圖 6)。於是通過極的大圓弧 PQP_1Q_1 叫做本初經線，極線 QmQ_1 叫做赤道。

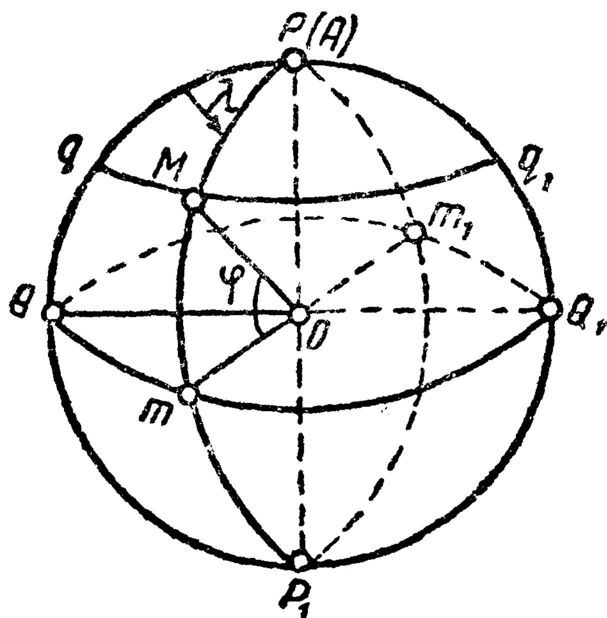


圖 6

爲了確定球面上一點 M 對於赤道 QQ_1 和本初經線 PQP_1Q_1 的位置，通過 M 點和極點 P 作大圓弧。得到的半圓周 PMP_1 叫做 M 點的經線，或經圓。從 M 點沿大圓弧到赤道的距離 mM 叫做 M 點的緯度。緯度用字母 φ 來表示並且從赤道到北極或南極是從 0° 到 90° 變化。從赤道到北極的緯度叫北緯，從赤道到南極的緯度叫南緯。

有時不用緯度而用對應於中心角 MOP 的弧 MP，MP 叫做極距並且用字母 Δ 表示。極距和緯度的和等於 90°，即

$$\varphi+\Delta=90^\circ.$$

在球面上，也像在平面上一樣，一個坐標是不够的；因爲在平行於赤道 QQ_1 的小圓 qMq_1 上，所有的點的緯度都是相同的。

通常把經度取作第二個坐標，經度是用本初經線(對地球來說本初經線就是格林威治經線)所在平面與 M 點的經線所在平面中間的二面角 QPP_1M 來度量的。二面角 QPP_1M 對應於球面角 qPM。經度用 λ[1] 表示並且按時針的方向從 0° 到 360° 變化或者分爲東西兩方面在 0° 和 180° 之間變化(東經和西經)。

假設 M 點有緯度 $\varphi_M=46^\circ$ 和經度 $\lambda_M=82^\circ$，則一般縮寫爲：M (46°；82°)。

[1] 在結晶學中經度用字母 φ 緯度用字母 ν 極距用字母 ρ 來表示。

б）水平坐標系

假設轉動球面使A點和天頂Z重合，則極線SHN在水平面內(圖7)。

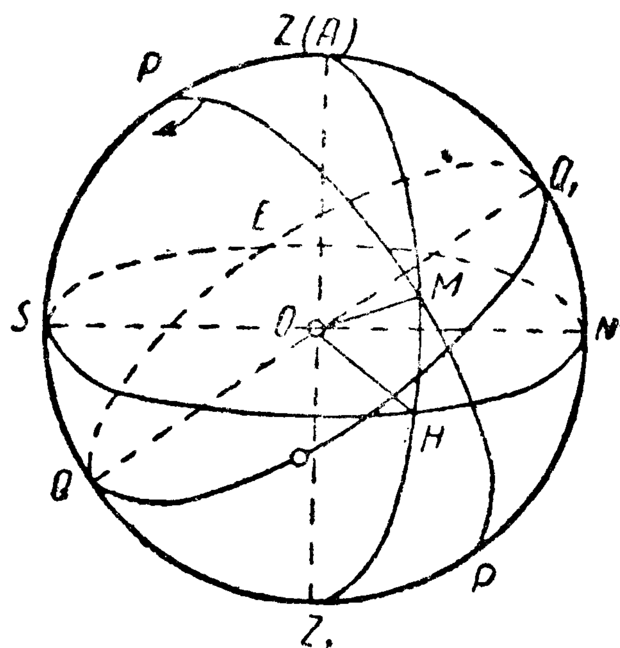


圖 7

球面上任一點M的位置在這種場合用下面兩個坐標確定：第一個是天頂距——就是圓弧ZM或中心角ZOM，第二個是這樣得到的，假設經過Z點Z_1點(底點)和M點作半圓，則第二個坐標就是方位角NH(從N點——北——到H點的圓弧，此處H點是半圓ZMZ_1和水平線$NHSE$的交點)。方位角從N點(北)或S點(南)開始按照時針方向從0°變到360°。方位角用字母A或a表示。

有時第一個坐標不用天頂距而取M點的傾角α，傾角是用弧HM或中心角HOM度量並且確定M到水平線的距離。同一個點的頂點距離和傾角之間存在一個關係式：

$$Z+\alpha=90°.$$

假設M點有頂點距離$Z_M=60°$和方位角$a_M=30°$，則縮寫成這樣：$M(60°;30°)$。

§4　球在平面上的投影、製圖網

設OM_0爲通過投射中心O和被投射點M_0的射線，則投影平面K和OM_0的交點M叫做M_0在K上的投影(透視影)(圖8)。

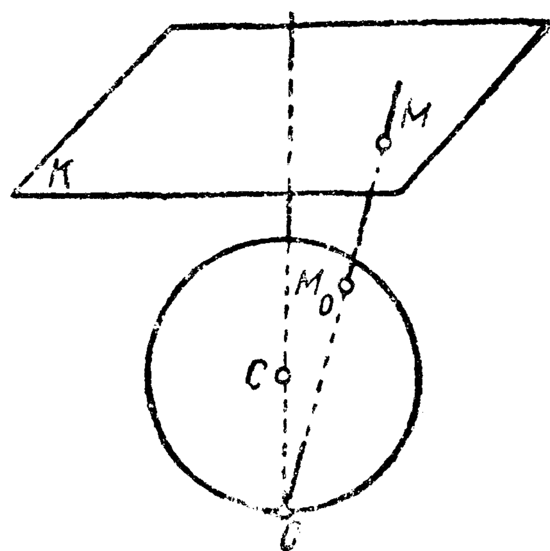


圖 8

假設投射中心在球面上，則投影叫做製圖投影(圖9)。

坐標相同的點的軌跡叫做坐標曲線。有一定經度的坐標曲線叫做經線，有一定緯度

的坐標曲線叫做緯線。這兩種坐標曲線的總體叫做球上的坐標網，而在已知投影中它們在平面上的像叫做製圖網。

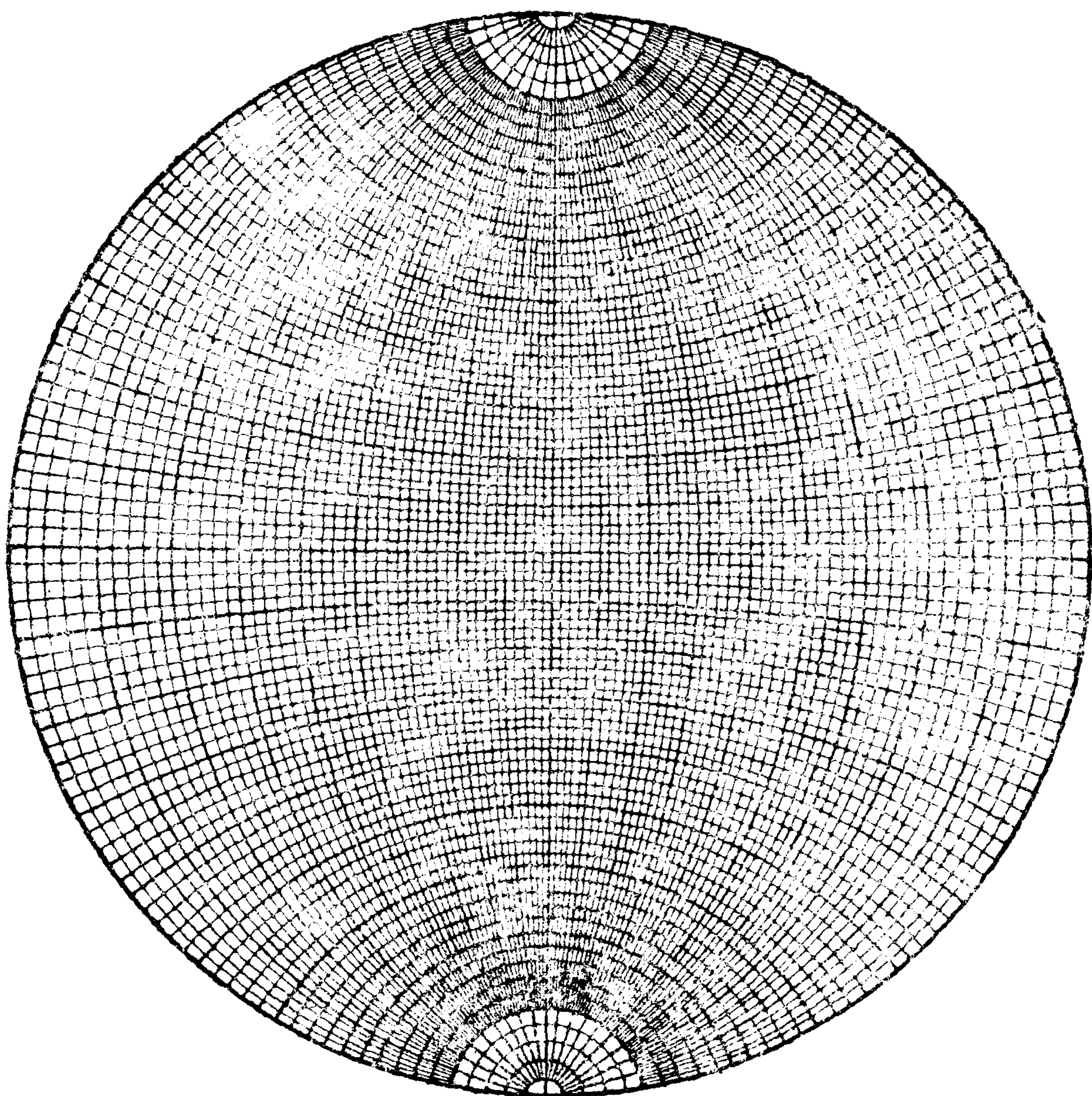


圖 9

設有從 O 點射出的光線照射在以 C 為中心的薄玻璃球上（圖 10），而這個球上畫有在 M_0 點相交的經線和緯線。如果這個坐標系的軸 P_0P_0' 正指着光線，則經線在投影平面上的投影成為從 P 點（軸 P_0P_0' 的投影）射出的射線束，而緯線則投射成為以 P 為中心的同心圓。這樣的網叫做規則網。圖 11 表示規則製圖網的一般形式。

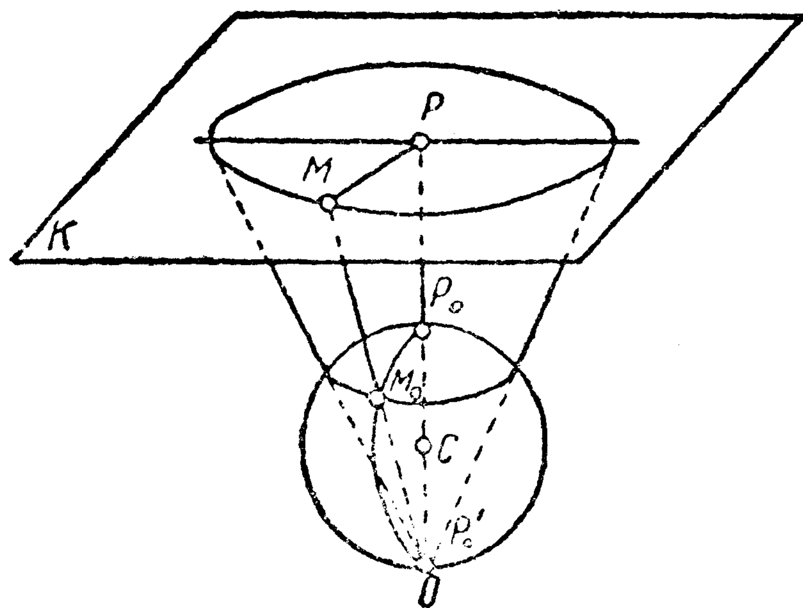


圖 10

假設球軸 P_0P_0' 的位置和中心射線 OZ 垂直（圖 12），則在球

上得到橫斷坐標系，而在平面K上得到橫斷或等距方位網，在這上面無論經線或緯線都投射成爲圓周。

赤道和中央經線投射成爲互相垂直的直線。

圖 13 表示橫斷製圖網的一般形狀。

還有第三種製圖網——斜製圖網——這是當球軸 P_0P_0' 對中心光線 OC 斜放着時得到的。

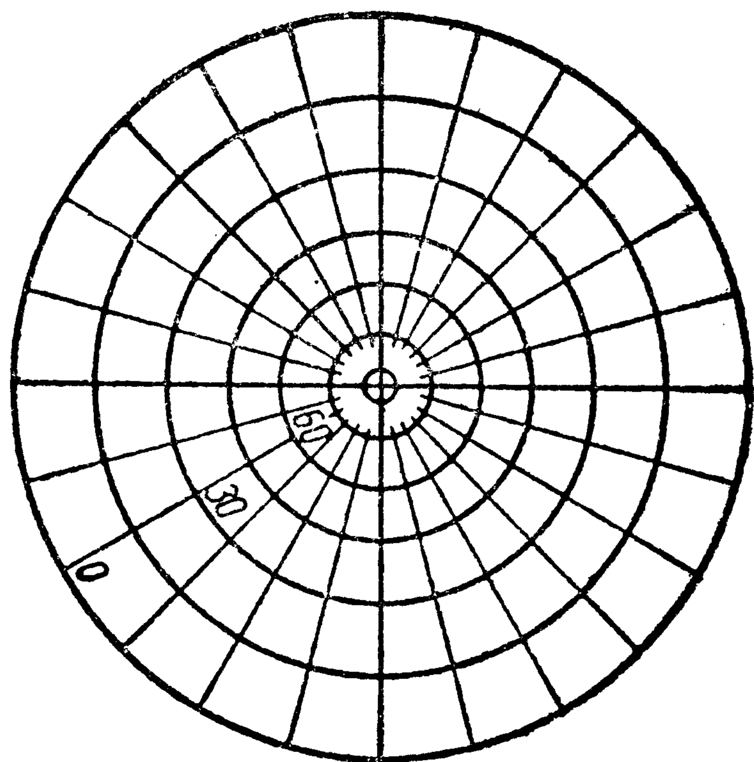


圖 11

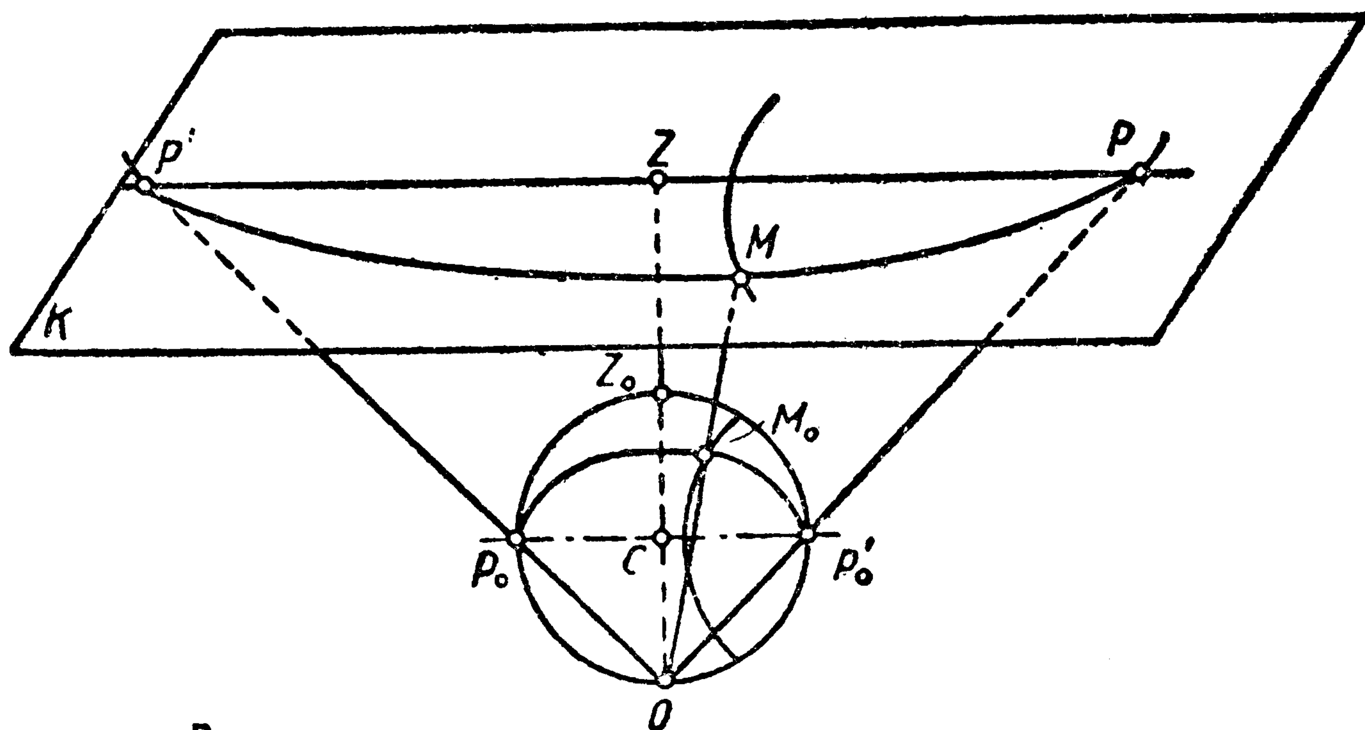


圖 12

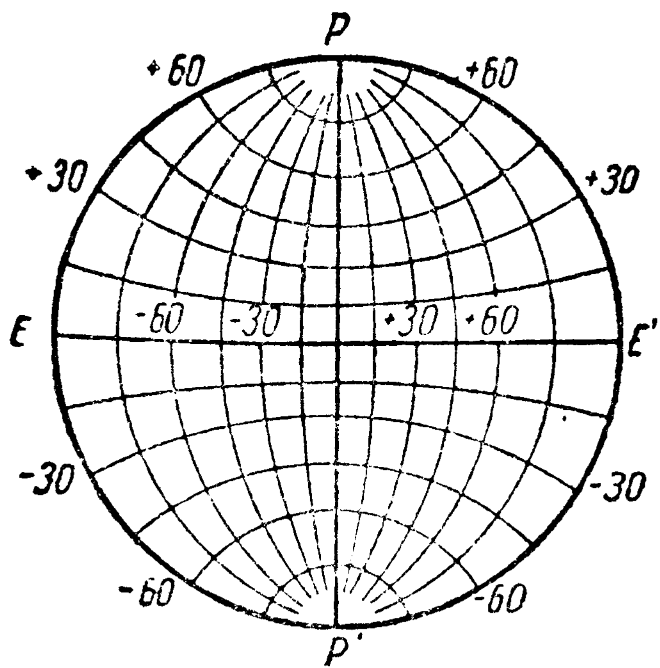


圖 13

製圖網在球面三角中當解作圖問題時有很大的用處，同時在天文學、測量學、結晶學等方面也有很大的用處。這種網保存無限小圖形的相似性，並且僅有這種網具有這種性質，就是把球上的任一圓周還投射成爲圓周[1]。

用作圖的方法很容易得到製圖網。

[1] 橫斷製圖網這個性質的證明牽涉很遠，在製圖教程"高等測量學"中可以見到。

爲此目的用，例如，10 公分長的半徑作圓（圖 14），並且分圓周 $ABCD$ 爲 24 部分。把得到的點和 AB 兩點用直線連接起來。如此，直徑 AB 和 CD 都被分成 12 部分。在互相垂直的直徑上得到一系列的點，我們依次通過每這樣三個點作圓弧，即三個點中有兩個在圓周上一個在直徑上。結果我們得到的圓弧就是在橫斷製圖投影中經線和緯線的像。

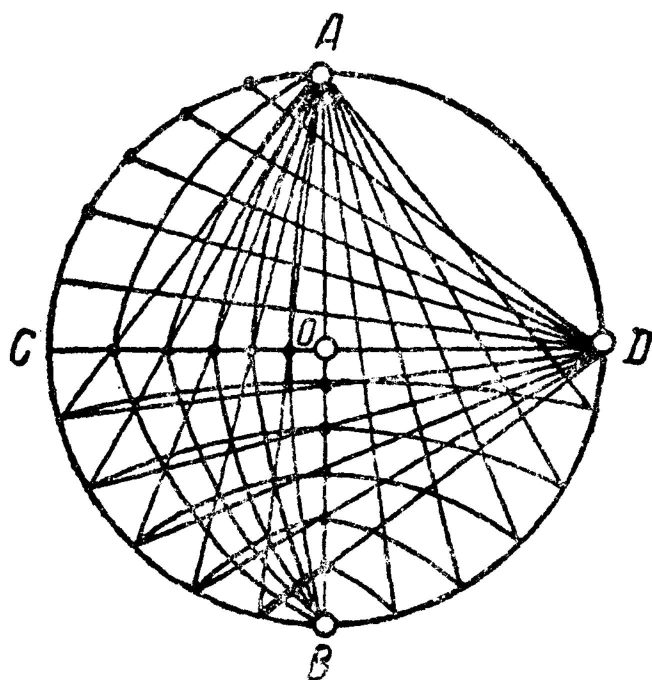


圖 14

兩個直徑的交點 O 乃是網的極點。

在圖 9 上弧中間的間隔是 2°。爲了構造網時圓周的作圖最好用特別柔軟的金屬尺，例如，偉大的俄羅斯學者——結晶學家 E. C. 非達維維所製的尺。

§ 5 一般評論及製圖網對解球面幾何問題的應用

所有以下問題均解在 12×12 公分大小的透明紙（蠟紙）上，不用作圖器械，只用削尖的硬鉛筆一枝。

在透明蠟紙網上，作符號 -⊕- 表示極的位置和短線—表示水平直徑的左端；經線認爲是沿赤道按反時針向從 0° 到 360° 或是按順時針向和反時針向各從 0° 到 180°；上半球，即北半球所有的點都用小圓表示，下半球所有的點都用十字表示。用這些約定的符號，我們解幾個預備的例子，這些例子說明製圖網的應用。

問題 1 根據坐標作點（圖 15）。

$$A\,(\varphi=+50°;\ \lambda=280°),$$
$$B\,(\varphi=-40°;\ \lambda=50°).$$

從零點 a 起沿赤道按反時針向計算 280° 並用短線標出點 b。圍繞中心轉動蠟紙使 b 點和水平直徑的一端重合，隨後按水平直徑找 50°

得點 A，用小圈標出，於是 A 點在北半球並有坐標 $\varphi=50°, \lambda=280°$。

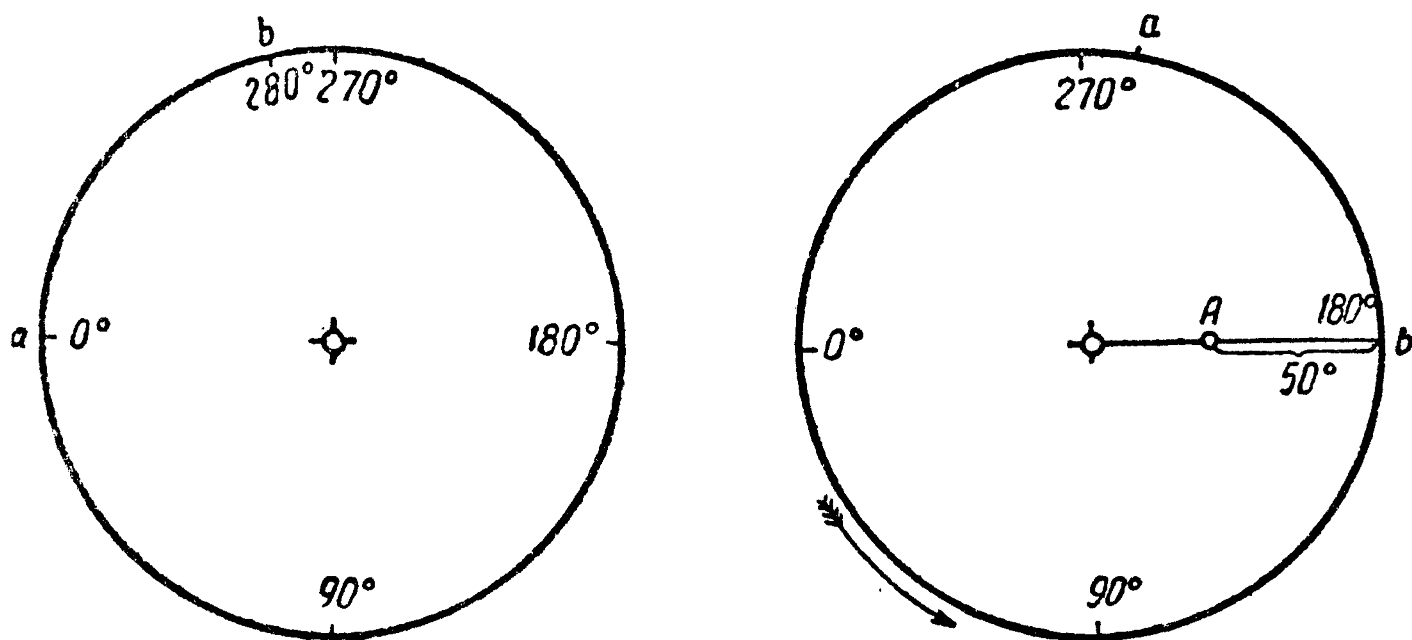


圖 15

用完全相似的方法可以作出具有坐標 $\varphi=-40°, \lambda=50°$ 的點 B（圖 16），因爲 B 點在下半球卽南半球上（φ 有負號），所以用十字標出。

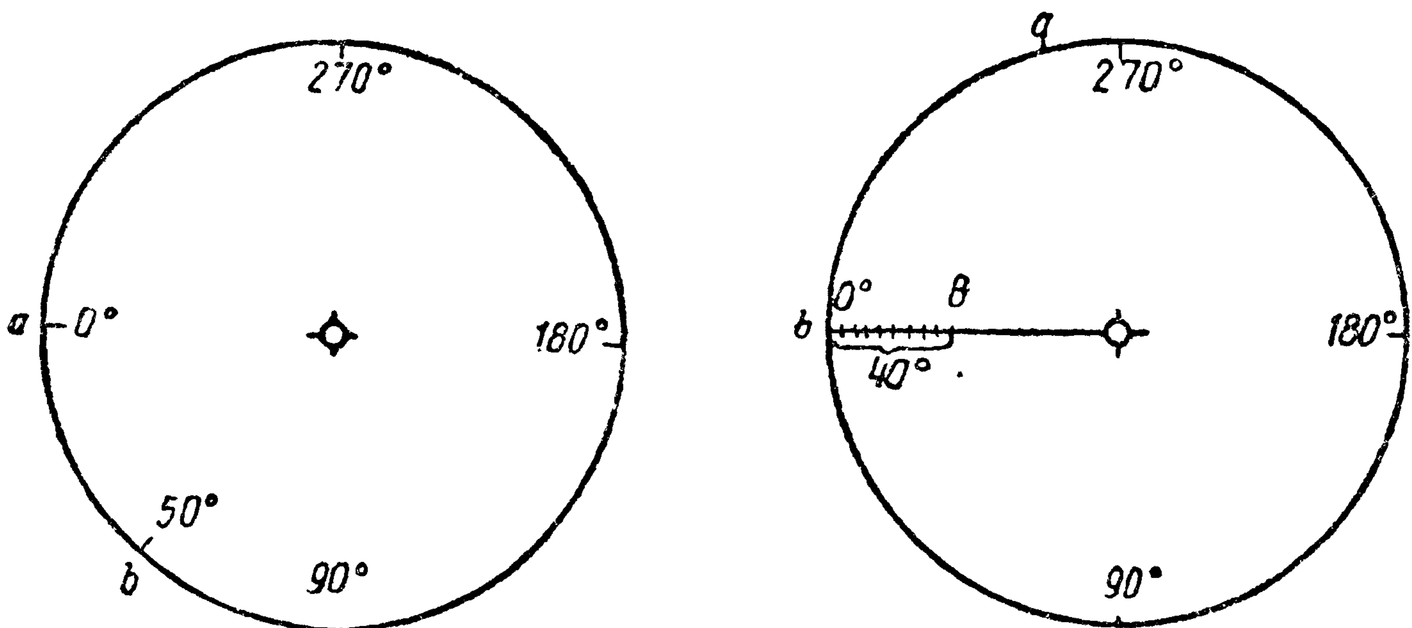


圖 16

問題 2　通過二已知點作大圓弧，並測量其長度（圖 17）。

用蠟紙圍繞中心的運動，我們可以把這兩個點放在同一個大圓弧上或使它們對稱於兩個相隣的大圓弧；用弓形規或用手通過 A 和 B 作圓弧。因爲 AB 弧重合於製圖網上的大圓弧所以也是大圓弧。

在 A 和 B 中間的網上的度數給出 AB 弧的長度。需要注意，在 2 度製圖網上弧和角的準確度大約是 1°。

問題 3　求已知大圓弧 AB 的極 P（圖 18）。

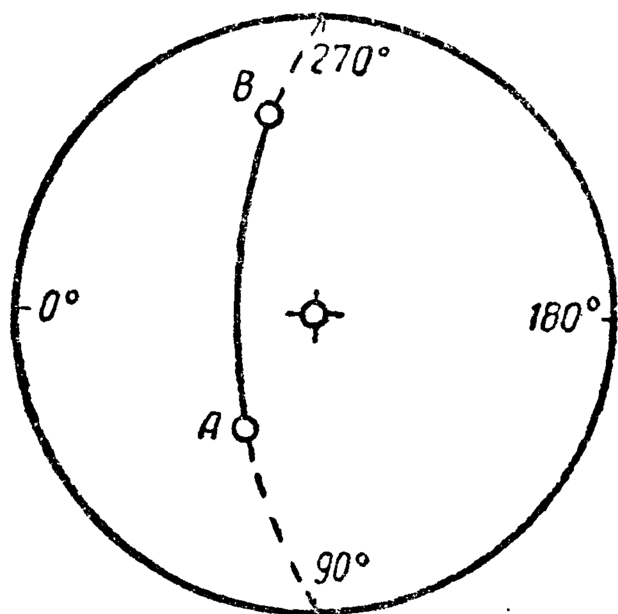


圖 17

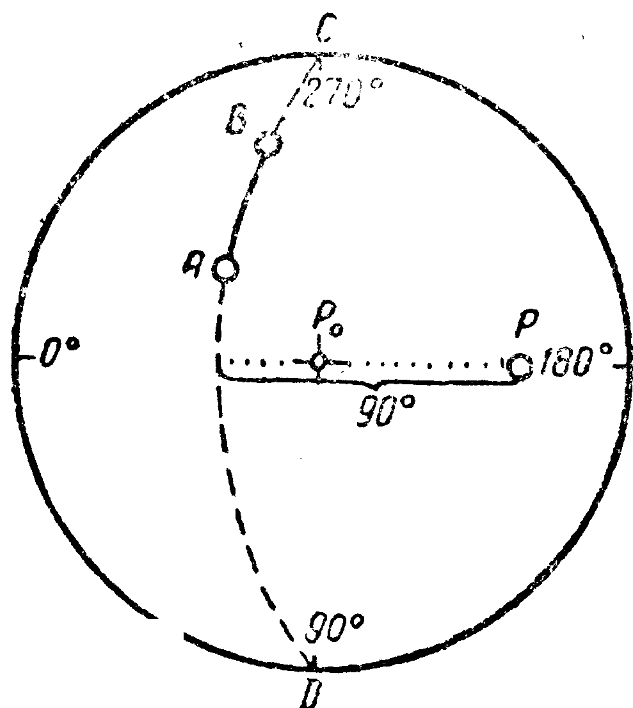


圖 18

用蠟紙圍繞中心的旋轉我們使已知弧 AB 乃重合於網的一個大圓弧上；從弧的延長線上沿 0°—180° 的直徑向右截取 90°。用小圈標出的P點就是弧的極。

問題 4 在蠟紙上已給出極P的位置，求極線。

用蠟紙圍繞中心的旋轉我們把極P放在水平直徑上（圖 18）並沿從P到投影極的方向截取 90°；通過得到的截點沿網上的弧作大圓弧 CD，則 CD 就是所求的極線。

問題 5 測量已知球面角。

用蠟紙圍繞中心的旋轉把球面角的頂點 A 移到水平直徑上（圖 19）並作極線 DE 即距離A點 90° 的大圓弧。DE 弧上在角邊沿長線中間的度數就是球面角的大小（球面角的邊的沿長線是沿網的大圓弧作的）。

問題 6 通過A點向大圓弧 AB 作大圓弧使其交角等於 α(圖 20)。

用蠟紙圍繞中心的旋轉把A點移到水平直徑上並在中心方面截取 90°，通過P點到 AB 弧延長線的截點作極線 PC；從C點起極線上截取弧 CD，使等於 α。再用圍繞中心的旋轉把A點和D點移到同一個大圓弧上。作弧 AD，於是得到的球面角 BAD 等於 α。

問題 7 已知球面上一點 A，求作其直徑對立點 A_1（圖 21）。

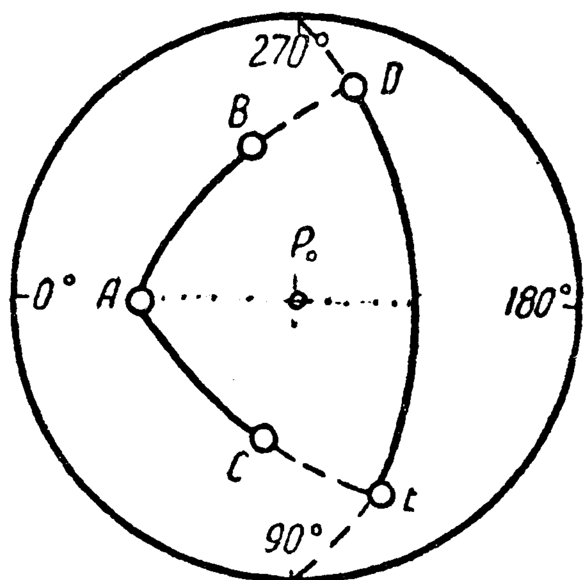


圖 19

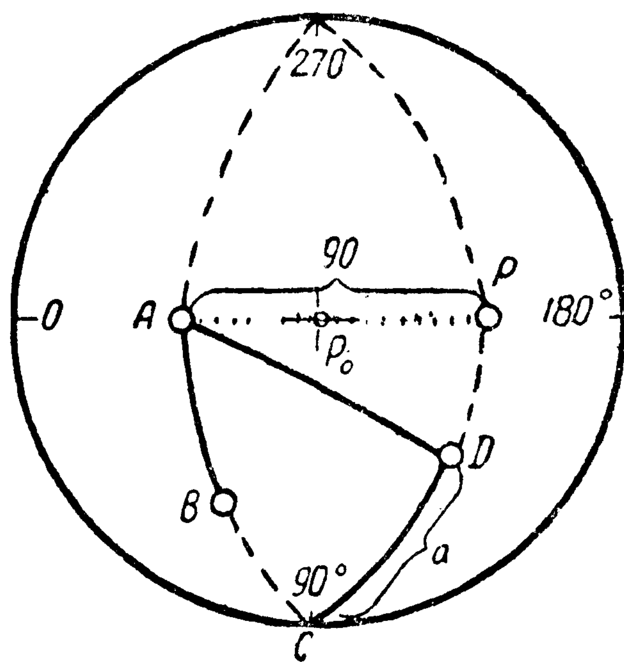


圖 20

用蠟紙圍繞中心的旋轉把 A 點移到水平直徑上。在此同一直徑上作一點 A_1 使距離 P_0A_1 等於 P_0A，則 A_1 點就是已知點 A 的直徑對立點。

問題 8　以已知點 A 爲球面中心，求作球面半徑 $r=30°$ 的小圓（圖 22）。

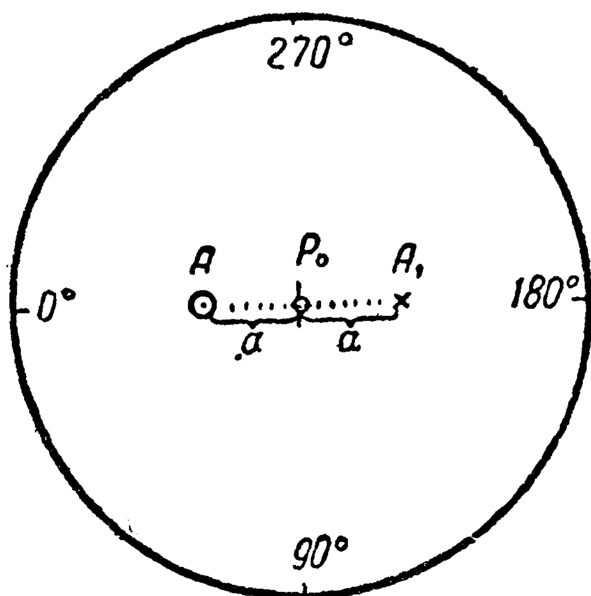


圖 21

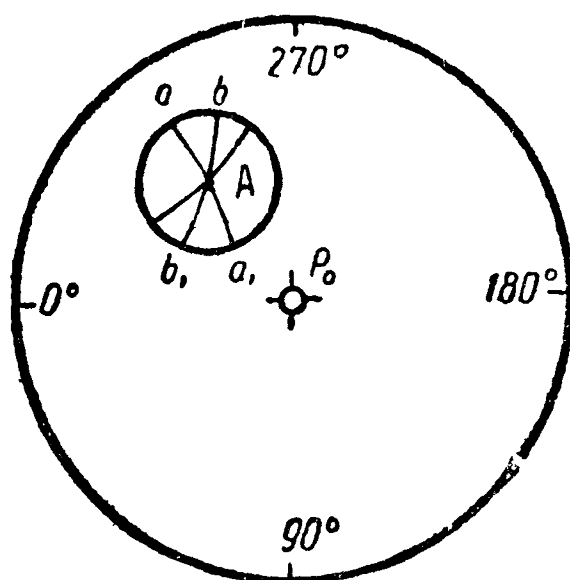


圖 22

用蠟紙圍繞中心的旋轉把 A 點移到大圓和小圓的交點上並沿大圓向兩方面作弧，在這兩弧上各截取 30° 得到 a 和 a_1 兩點，然後用同樣的圍繞中心的旋轉把 A 點移到下一個大圓和小圓的交點上並向兩面作大圓弧，在這兩弧上各截 30°，於是得到兩點 b 和 b_1，並依此類推。在網上選取最適宜的小圓弧把每一對相隣的兩點連接起來，就得到所求的小圓。應該注意，小圓的眞正中心不和球面中心重合。

§ 6　球面上的圖形：球面二角形、球面三角形、極線三角形和對稱三角形

球面二角形　球面上包圍於兩個相隣半圓周中間的部分叫做球面二角形；顯然，二角形可以看作半圓周圍繞直徑旋轉某一角度 α 所成的旋轉面。

因爲赤道是二角形頂點 P 和 P_0 的極線(圖 23)，所以赤道等分二角形的邊。

在已知二角形兩邊中間的弧 AB 叫做二角形的赤道帶，它的長度等於 αR；當半徑 $R=1$ 時赤道帶等於 α。

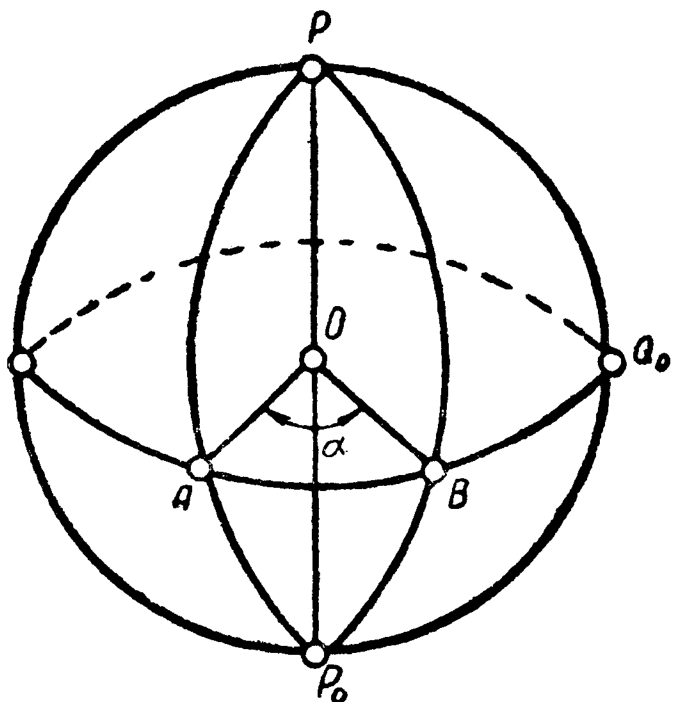


圖 23

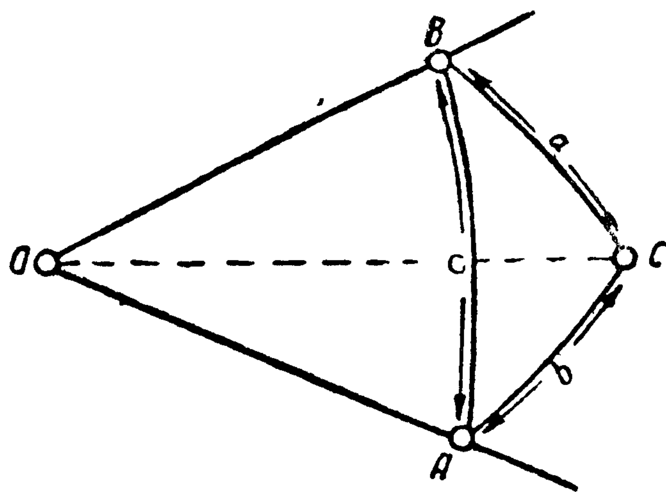


圖 24

球面三角形　相交於三點的三個大圓弧所圍成的球面上的一部分叫做球面三角形。

球面三角形的要素——三個小於 180° 的角和三個邊；假設三邊都小於 $2d$，則這樣的三角形叫做歐勒球面三角形；假設有一邊大於 $2d$ 則叫做馬比阿斯-斯圖第球面三角形。組成球面三角形的大圓弧所在的平面構成一個三面角，它的頂點在球心而它的稜是從球心到球面三角形的頂點的球半徑。

從圖 24 明顯地看出，三面角 $OABC$ 的每一個平面角都用和它相

對的球面三角形的邊來度量，而每一個二面角都等於三角形的球面角。在任一三面角中：1)每一平面角小於其他兩平面角的和而大於它們的差；2)三個平面角的和小於 360°。因此，球面三角形三邊的和常大於零而小於 360° $(4d)$。球面三角形可以是二等邊的、等邊的、直角的或斜的。

直角三角形可以有一個、兩個或三個直角；斜三角形可以有一個、兩個或三個鈍角。假設在球面三角形中至少有一個邊等於四分之一個圓周，則這樣的三角形叫做 4 分球面三角形。

極線三角形　假設把球面三角形 ABC（圖 25）的頂點取作極並用 90° 的球面半徑從每一頂點作極線，則這些極線兩兩相交構成一新球面三角形 $A'B'C'$，這一三角形叫做極線三角形或補三角形。

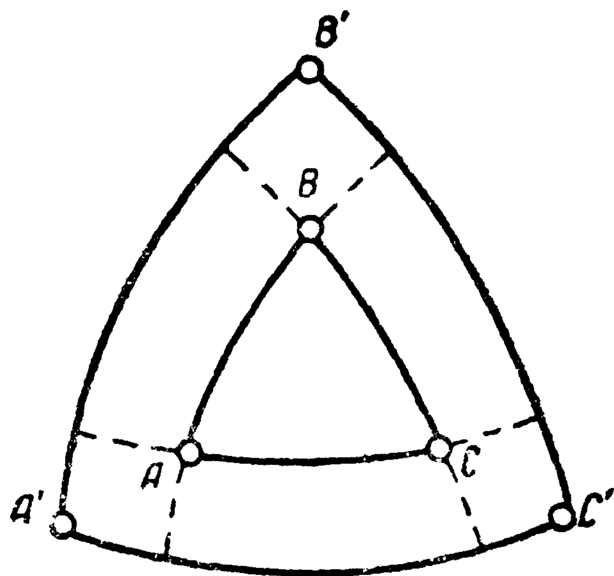


圖 25

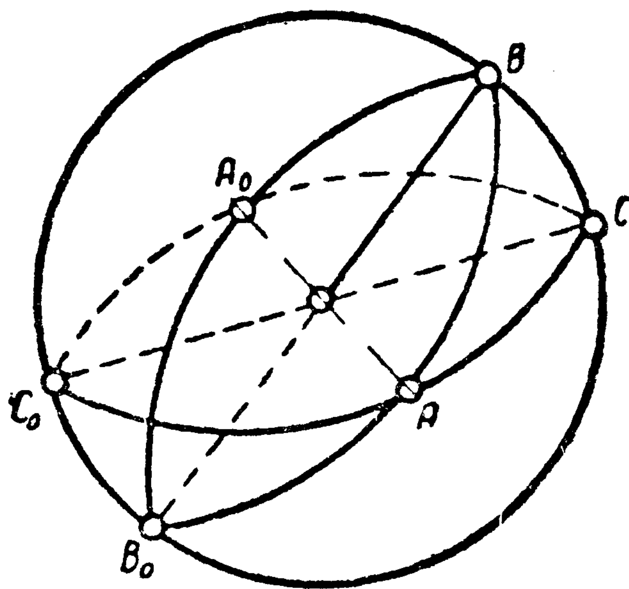


圖 26

對稱三角形　假設從球面三角形 ABC 的頂點向球心作半徑並延長之使和球面交於 $A_0B_0C_0$，則用大圓弧把這些點兩兩連接起來便得一球面三角形，它和原三角形對應並且叫做對稱三角形（圖 26）。三角形 $A_0B_0C_0$ 中所有的部分即所有的邊和角都分別等於三角形 ABC 中相當的部分，但雖然如此它們並不能重合。原因在於第一個三角形中各部分的排列次序和第二個三角形中的不同；對稱二等邊三角形是例外，它們可以疊合。

§ 7 極線球面三角形的性質

I. 原球面三角形和極線球面三角形的關係

1. 原三角形和極線三角形的關係是相互的，即：

a）原三角形的頂點是極線三角形的邊的極。

б）極線三角形的頂點是原三角形的邊的極。

命題"a"不需要證明，因爲可以從定義直接推出。

我們證明命題"б"的正確性。

用大圓弧 A_1B 和 A_1C 把極線三角形的頂點 A_1 和原三角形的頂點 B 和 C 連接起來（圖 27）。因爲 B 點是弧 A_1C_1 的極，所以 $A_1B=90°$；因爲 C 點是弧 A_1B_1 的極，所以 $A_1C=90°$。於是 A_1 點距離 BC 弧的 B 點和 C 點均爲 $90°$。

我們有

$$\angle A_1OB=90°,\ \angle A_1OC=90°;\ A_1O\perp OB,\ A_1O\perp OC.$$

一直線垂直於其他兩個直線則必垂直於通過這兩直線的平面。所以直線 A_1O 垂直於平面 OBC 並且弧 BC 上任意點和 A_1 點的距離都是 $90°$。這就是說極線三角形的頂點 A_1 是原三角形 ABC 的邊 BC 的極。

同樣的方法可以證明，極線三角形 $A_1B_1C_1$ 的頂點 B_1 和 C_1 是原三角形 ABC 的邊 AC 和 AB 的極。

2. 原球面三角形的角與極線三角形中對應邊的和等於 $180°$，即 $B+b'=180°$。

設三角形 ABC 與 $A'B'C'$（圖 28）互爲極線三角形。延長 BA 邊和 BC 邊使與 $A'C'$ 邊交於 A_1 和 C_1 兩點。B 點是 $A'C'$ 弧的極，因而 A_1C_1 是 B 角的度量。我們用 b' 表示的 $A'C'$ 弧被 A_1 和 C_1 分成三部分：$A'A_1$, A_1C_1 和 C_1C'，但是

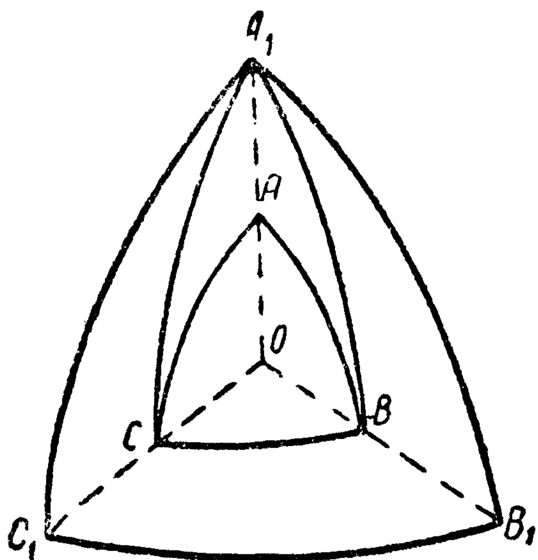


圖 27

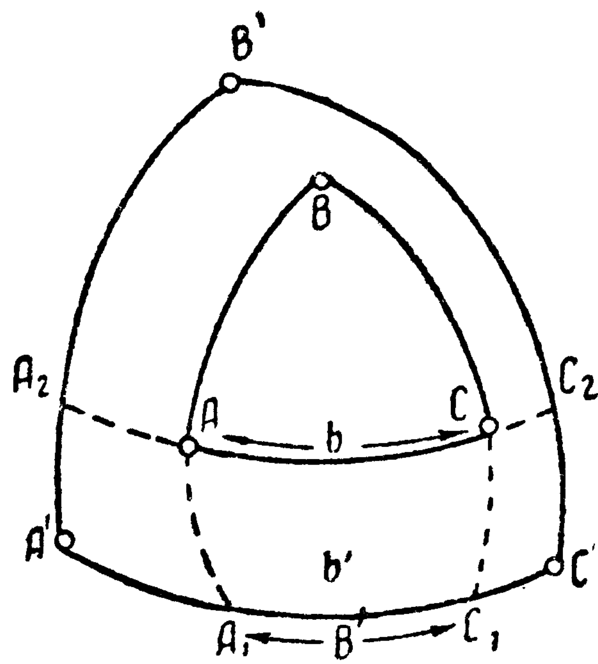


圖 28

$$B = A_1C_1$$

$$b' = A'A_1 + A_1C_1 + C_1C'.$$

把這兩等式相加，得

$$B + b = A'A_1 + A_1C_1 + A_1C_1 + C_1C' = A'C_1 + A_1C'.$$

因爲 A' 點是 BC 弧的極，而 C_1 點在 BC 弧的延長線上，所以

$$\smile{A'C_1} = 90°.$$

因爲 C' 點是 AB 弧的極，而 A_1 點在 AB 弧的延長線上，所以

$$\smile{A_1C'} = 90°.$$

把這些值代入 $B + b'$ 的展開式中，得

$$B + b' = 180°.$$

同樣可以證明

$$A + a' = 180°$$

和

$$C + c' = 180°.$$

3. 極線三角形的角與原三角形中對應邊的和等於180°，即 $B' + b = 180°$。

延長原三角形的邊 AC（圖 28）使與極線三角形的邊 $B'A'$ 和 $B'C'$ 交於兩點 A_2 和 C_2。

因爲 B' 點是 A_2C_2 弧的極，所以 A_2C_2 是 B' 角的度量。A_2C_2 弧被

A 和 C 兩點分成三部分 A_2A, AC, CC_2。而 b 即 AC 弧，於是

$$B' = A_2C_2 = A_2A + AC + CC_2.$$

$$b = AC.$$

把這兩等式加起來，得

$$B' + b = A_2A + AC + CC_2 + AC = A_2C + AC_2.$$

因為 C 點是弧 $A'B'$ 的極，而 A_2 是 $A'B'$ 上的點，所以

$$\overset{\frown}{A_2C} = 90^\circ.$$

因為 A 點是弧 $B'C'$ 的極，而 C_2 是 $B'C'$ 上的點，所以

$$\overset{\frown}{AC_2} = 90^\circ.$$

把這些值代入 $B' + b$ 的展開式中，得

$$B' + b = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

同樣可以證明

$$A' + a = 180^\circ$$

$$C' + c = 180^\circ.$$

註 假設原球面三角形所有的邊都小於 90°，則極線三角形在原三角形的外面；反之，假設原球面三角形所有的邊都大於 90°，則極線三角形在原三角形的裏面；最後，假設原球面三角形有一邊或兩邊大於 90° 而其餘小於 90°，則極線三角形和原三角形相交。

II. 球面三角形角的性質

a) 在任意球面三角形中三個角的和常小於 $6d$（6 直角）而大於 $2d$（2 直角）。

為了證明這一命題，我們考察球面三角形 ABC 和它的極線三角形 $A'B'C'$（圖 28）。根據原三角形和極線三角形的性質，直接得出：

$$A + a' = 180^\circ$$

$$B + b' = 180^\circ$$

$$C + c' = 180^\circ.$$

相加，得　$A+a'+B+b'+C+c'=540°$；

但因爲　$360° > a'+b'+c' > 0°$，

所以　$180° < A+B+C < 540°$，

從這裏也知道，在球面三角形中各角的和是一個變量。

b) 在球面三角形中兩角的和減去第三角常小於 $2d$。

在極線三角形 $A'B'C'$ 中：

$$a'+b' > c',$$

但

$$a'=180°-A,$$

$$b'=180°-B,$$

$$c'=180°-C.$$

代入，得　$(180°-A)+(180°-B)>180°-C$

或　$A+B-C < 180°$.

c) 球面三角形的外角小於不相隣兩內角的和而大於它們的差(圖29)。

已知：　$D+C=180°$

$$A+B+C>180°,$$

從此得　$A+B+C>D+C$

或　$A+B>D.$

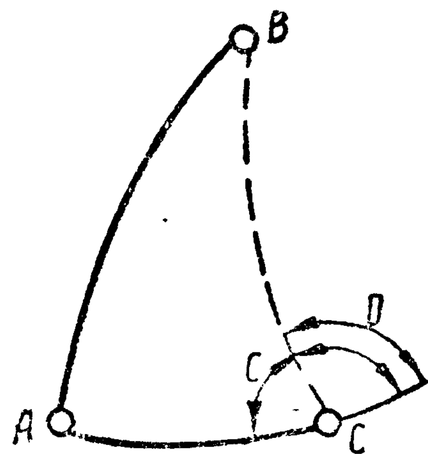


圖 29

我們來證明定理第二部分：

已知：　$A+B-C<180°$

或同樣情形　$A+C-B < 180°$,

從此得　$A-B < 180°-C$,

因爲　$D=180°-C$,

所以　$A-B<D$.

III. 球面三角形的相等

同一球面上的兩三角形或半徑相等兩球面上的兩三角形，如有以

下各部分相等，則全等：

1）兩邊及其夾角；

2）兩角及其夾邊；

3）三邊；

4）三角。

在前三種情形，球面三角形的相等可用疊合法從球心三面角的相等推出。第四種情形的證明需藉極線三角形的幫助（圖 30）。設兩已知球面三角形 ABC 和 DEF 邊的順序相同，並且：

$$A=D,\ B=E,\ C=F.$$

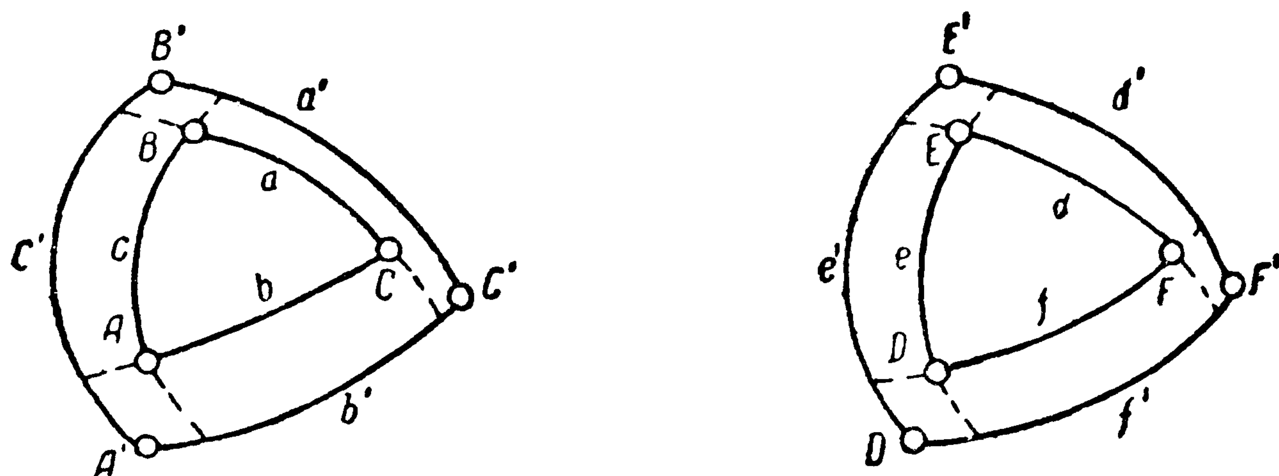


圖 30

作它們的極線三角形 $A'B'C'$ 和 $D'E'F'$，將有：

$$A+a'=180°=D+d',$$

$$B+b'=180°=E+e',$$

$$C+c'=180°=F+f'.$$

因爲 $$A=D,\ B=E,\ C=F,$$

所以 $$a'=d',\ b'=e',\ c'=f';$$

因此，根據三角形相等的第三種情形，極線三角形相等。

從這個相等得出：

$$A'=D',\ B'=E',\ C'=F',$$

但是 $$A'+a=D'+d,$$

$$B'+b=E'+e,$$

$$C'+c=F'+f.$$

從這三等式分別減去以上三等式，得：

$$a=d,$$

$$b=e,$$

$$c=f,$$

這也就證明了球面三角形 ABC 和 DEF 的全等。

球面三角形，有度數相等的邊和角，但在不同半徑的球面上叫做相似球面三角形。

按照定義，球面三角形 ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$（圖 31）是相似球面三角形。

IV. 球面三角形中邊和角的關係

1. 同一球面三角形中對等邊的角相等，反之，對等角的邊也相等。

a）已知 $AB=BC$（圖 32）；求證 $A=C$。平分 AC 邊並且用大圓弧把分點 D 和三角形的頂點 B 連接起來。球面三角形 ABD 和 DBC 相等（球面三角形相等的第三種情形）；因而 $A=C$。

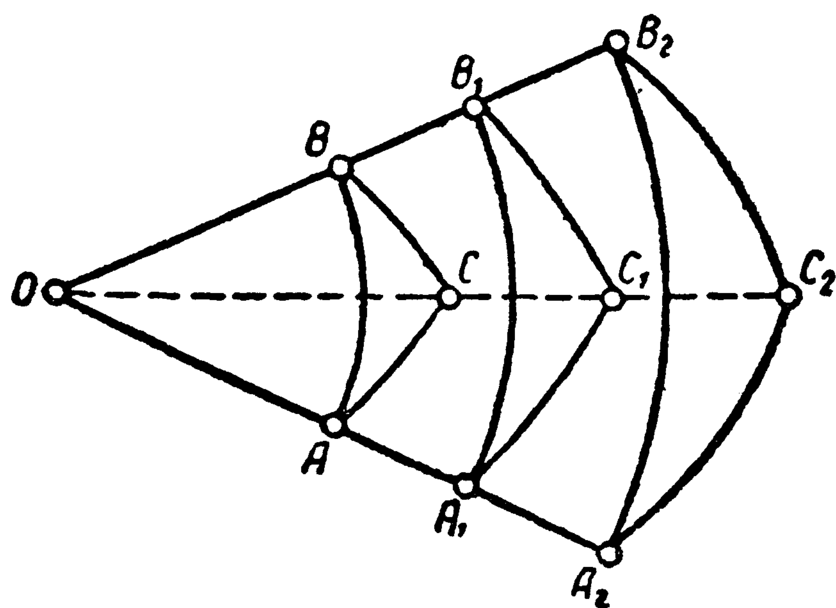


圖　31

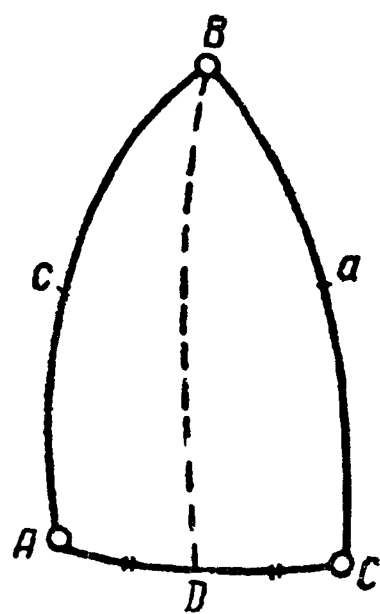


圖　32

б）已知 $A=C$；求證 $a=c$。作已知三角形 ABC 的極線三角形 $A'B'C'$，則將有：

$$A+a'=180°=C+c'.$$

但因爲 $A=C$，所以

$$a'=c',$$

從此得
$$A'=C',$$

因爲根據極線三角形與原三角形的關係有等式

$$A'+a=C'+c,$$

同時又已證明 $A'=C'$，所以

$$a=c.$$

2. 在任一球面三角形中對大角的邊較大，反之，對大邊的角也較大。

a) 設角 ACB（圖 33）大於角 ABC，即 $C>B$；求證 $AB>AC$。在角 C 中作大圓弧 CD，使角 DCB 等於角 DBC，於是 $CD=DB$。從三角形 ADC 來看，有

$$AC<AD+CD,$$

但因爲 $CD=DB$，所以有

$$AC<AD+DB \text{ 或 } AC<AB.$$

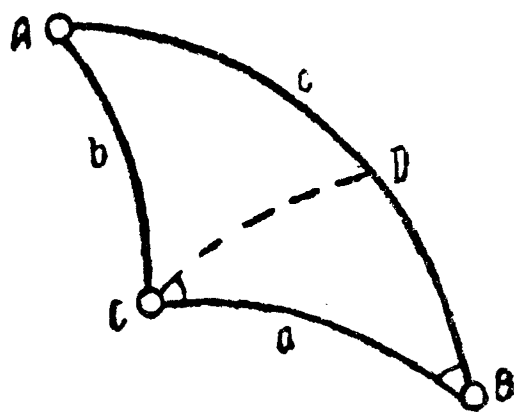


圖 33

б) 已知 $c>b$，求證 $C>B$。作已知三角形 ABC 的極線三角形 $A'B'C'$。因爲 $c>b$，所以

$$180°-C'>180°-B',$$

或
$$C'<B'.$$

根據上面定理我們得到

$$c'<b',$$

因爲
$$c'=180°-C,\ b'=180°-B,$$

所以
$$180°-C<180°-B.$$

從此得
$$C>B.$$

§ 8 球面三角形的內切圓和外接圓

1. 球面三角形的分角線 AO, BO, CO 交於三角形內切圓的圓心。

在球面三角形 ABC（圖 34）中作大圓弧平分 A 角和 C 角；得交點

O。從 O 點作大圓弧 OK, OM, ON 垂直於三角形的邊；此外並用大圓弧連接 O 和頂點 B。因爲三角形 AOK 等於 AMO，三角形 KOC 等於 CON，所以，顯然，$MO=OK=ON$，卽 O 點是內切於三角形的小圓的圓心。

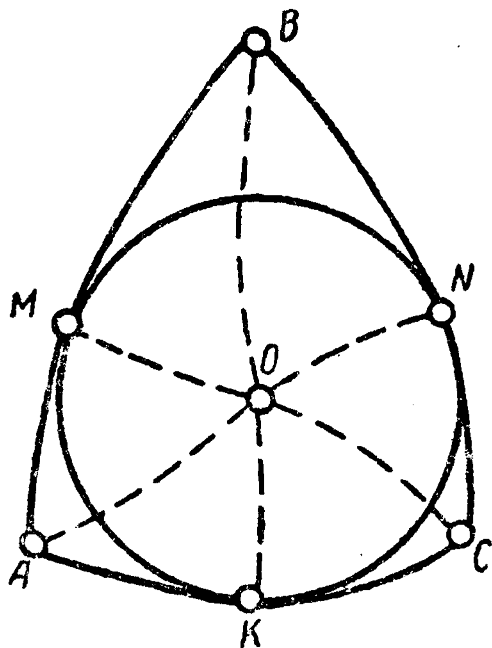


圖 34

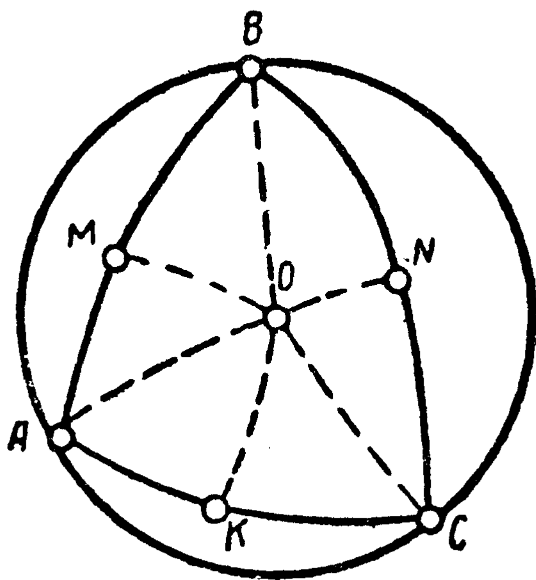


圖 35

2. 球面三角形的邊的垂直平分線 * 交於三角形的外接圓的圓心。

在球面三角形 ABC（圖 35）中作大圓弧垂直平分三角形的邊；得若干對相等的球面三角形，卽三角形 AOK 等於 KOC，三角形 CON 等於 ONB 及其他等等。所以 $AO=OC=OB$，卽 O 點是外接於三角形的小圓的圓心。

§ 9　球面二角形的面積、球面三角形的面積、球面剩餘的定義

球面二角形的面積　因爲二角形 PAP_1B 的面積對球面積 $4\pi R^2$ 的比等於圓弧 AB 對圓周的比，此處弧 AB 就是二角形的球面角 α 的度量；所以二角形 PAP_1B 的面積對球面積的比等於

$$\frac{PAP_1B}{4\pi R^2}=\frac{\alpha^\circ}{360^\circ},$$

* 原書誤作中線，茲改正之——譯者。

從此得,球面二角形的面積 S_a 等於

$$S_a = 4\pi R^2 \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \pi R^2 \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}. \tag{1}$$

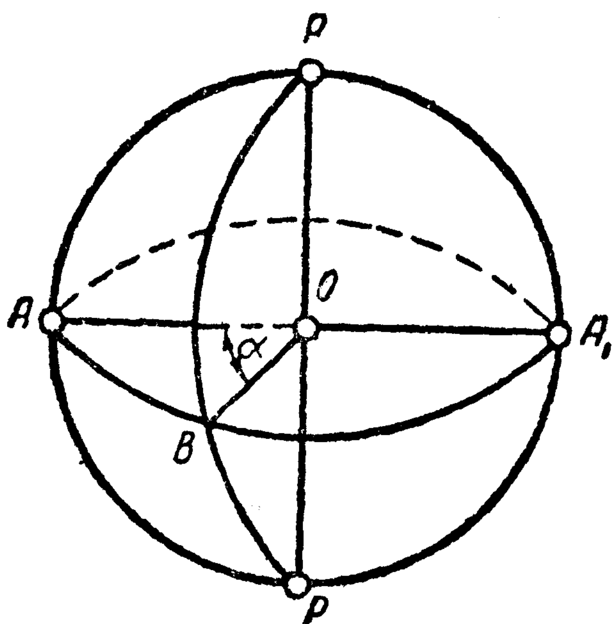


圖 36

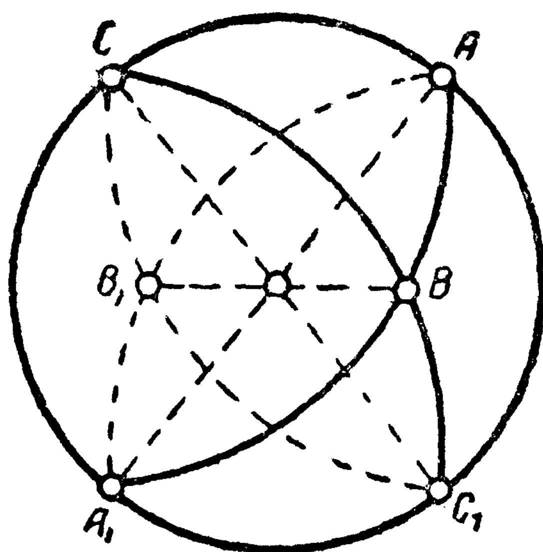


圖 37

球面三角形的面積 設有球面三角形 ABC (圖 37)。對於三角形的每一個角作對應於它的球面二角形:

對 $\angle A$ 作二角形 BAA_1C;

對 $\angle B$ 作二角形 ABB_1C;

對 $\angle C$ 作二角形 BCC_1A.

球面三角形 ABC 的面積等於二角形 A 的面積減去 A_1BC 的面積,也就是二角形 B 的面積減去 AB_1C 的面積,也就是二角形 C 的面積減去 ABC_1 的面積。

球面三角形 AB_1C 的面積等於和它對稱的三角形 C_1A_1B 的面積。我們有:

$$\Delta ABC = \pi R^2 \frac{A^\circ}{90^\circ} - \Delta A_1BC,$$

$$\Delta ABC = \pi R^2 \frac{B^\circ}{90^\circ} - \Delta AB_1C\,(=A_1BC_1),$$

$$\Delta ABC = \pi R^2 \frac{C^\circ}{90^\circ} - \Delta ABC_1,$$

相加,得

$$3\Delta ABC=\frac{\pi R^2}{90^\circ}(A+B+C)-(\Delta A_1BC+\Delta A_1BC_1+ABC_1).$$

後面括號中的式子等於半球的面積 $2\pi R^2$ 減去三角形 ABC 的面積；這樣

$$3\Delta ABC=\frac{\pi R^2}{90^\circ}(A+B+C)-(2\pi R^2-\Delta ABC)$$

或
$$2\Delta ABC=\frac{\pi R^2}{90^\circ}(A+B+C)-2\pi R^2$$

或
$$\Delta ABC=\frac{\pi R^2}{180^\circ}(A+B+C)-\pi R^2$$

或
$$\Delta ABC=\frac{\pi R^2}{180^\circ}\{(A+B+C)-180^\circ\}.$$

球面三角形三個角的和減去 180° 的差叫做球面剩餘並用字 ε 來表示。

於是
$$\Delta ABC=\frac{\pi R^2}{180^\circ}\varepsilon^\circ.$$

把球面剩餘表示爲秒並用字母 S 表示三角形的面積，得

$$\varepsilon''=\frac{180\cdot 60\cdot 60''}{\pi R^2}S;$$

因爲
$$\frac{180\cdot 60\cdot 60''}{\pi}=\frac{1}{\operatorname{arc} 1''}\approx\frac{1}{\sin 1''}=\rho'',$$

即一弧度所含秒數，我們有

$$\varepsilon''=\frac{S}{R^2}\rho''. \qquad (2)$$

假設球半徑等於單位長度，則

$$S=\varepsilon''\sin 1'',$$

而在角度量中

$$S''=\varepsilon'',$$

即球面三角形的面積等於球面剩餘。由此知道，在半徑相等的球面上，球面三角形的面積和它們的球面剩餘成比例。

球面多角形的面積　球面上由三個以上大圓弧相交所構成的圖形

叫做球面多角形。各邊相等的球面多角形叫做球面正多角形。

任意球面多角形(圖 38)的面積可以看成是若干三角形面積的和，這些三角形是用大圓弧 AC, AD, AE 等連接多角形的頂點構成的。用 ε_1, ε_2, ε_3 等來表示這些三角形的球面剩餘，得

$$S_1=\varepsilon_1 \operatorname{arc} 1'',$$
$$S_2=\varepsilon_2 \operatorname{arc} 1'',$$
$$S_3=\varepsilon_3 \operatorname{arc} 1'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由此球面多角形的面積等於

$$S=\operatorname{arc} 1'' \sum_1^n \varepsilon \approx \sin 1'' \sum_1^n \varepsilon.$$

在半徑 R 的球面上得

$$S=R^2 \sin 1'' \sum_1^n \varepsilon.$$

在一系列場合中多角形的球面剩餘 ε_n 可用以下公式求得

$$\varepsilon_n=\sum_1^n \varepsilon=\Sigma-180^\circ(n-2), \tag{3}$$

此處 Σ 是 n 角形所有球面角的和。

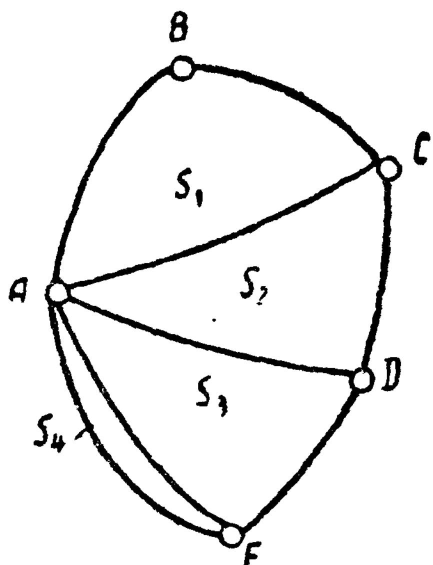


圖 38

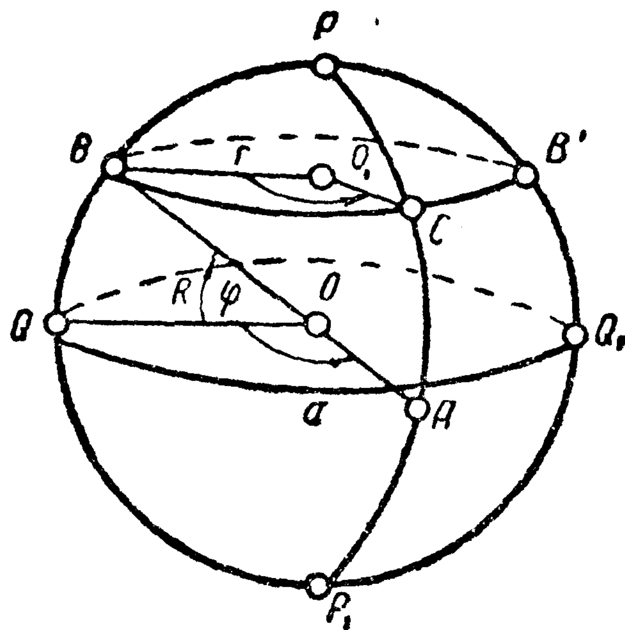


圖 39

§ 10　大圓弧和小圓弧的直線長度

設半徑 R 的球面上的弧 $QA=L$ (圖 39) 包含 α''。

於是這一大圓弧的直線長度爲

$$L=\frac{2\pi R}{360\cdot60\cdot60}\alpha'',$$

因爲

$$\frac{\pi}{180\cdot60\cdot60}=\text{arc }1''\approx\sin 1'',$$

所以對此大圓弧得

$$L=R\alpha''\sin 1''. \qquad (4)$$

根據前面的理由，小圓弧 $BC=l$ 的直線長度爲

$$l=r\alpha''\sin 1'',$$

此處 r 是小圓的半徑。

從三角形 OBO_1 有：

$$r=R\cos\varphi$$

或

$$L=R\cos\varphi\cdot\alpha\cdot\sin 1''.$$

取 L 和 l 的比有：

$$\frac{L}{l}=\frac{\alpha''\cdot R\cdot\sin 1''}{\alpha''\cdot R\cdot\cos\varphi\cdot\sin 1''}=\frac{1}{\cos\varphi},$$

或

$$l=L\cos\varphi.$$

§ 11　球面三角形作圖問題

問題 1　已知三邊 a, b, c，求作球面三角形（圖 40）。

作大圓弧並在其上截取邊 $AB=c$；然後，像在問題 8（15 頁）中一樣，從 A 點用球面半徑 $AC=b$ 作小圓弧；同樣從 B 點用球面半徑 $BC=a$ 作小圓弧，這兩個小圓弧的交點就是三角形的頂點 C。把 C 點和 A, B 兩點用大圓弧連接起來，即得所求三角形。

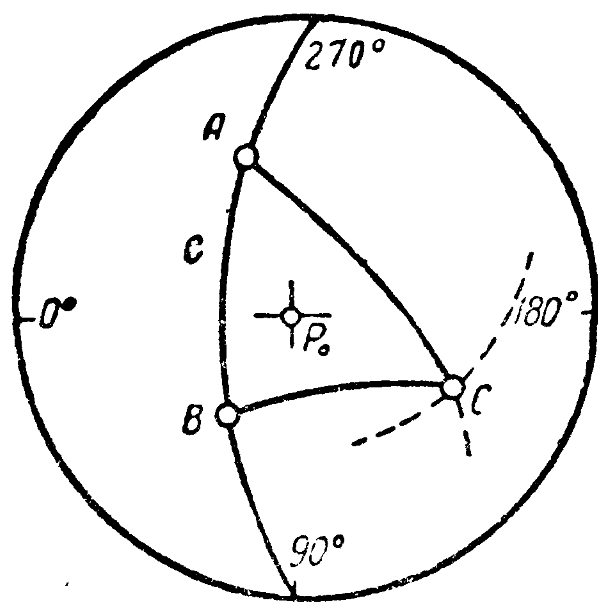


圖 40

問題 2　已知兩角 A 和 B 及其夾邊

AB，求作三角形並求其球面剩餘。

用問題6（14頁）中的方法在A點和B點作已知角A和B；在大圓弧AA_1和BB_1的交點得球面三角形的頂點C；再用同心旋轉測得C角的大小。從和$A+B+C$中減去$180°$得球面剩餘ε。

問題 3　已知球面三角形ABC的邊大於$90°$；求作極線三角形$A'B'C'$（圖42）。

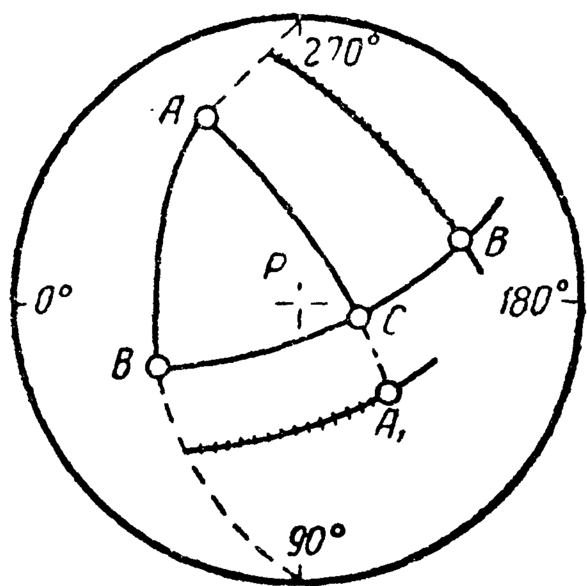


圖 41

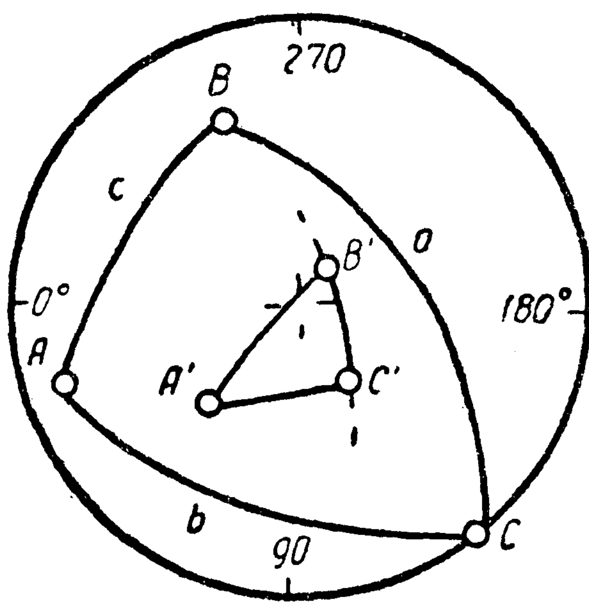


圖 42

用問題4（14頁）中的方法作三角形每個頂點的極線。這些極線相交構成極線三角形。測量原三角形的邊和極線三角形的角可以證明：

$$A'+a=B'+b=C'+c.$$

問題 4　已知三角，求作球面三角形。

按照問題1（29頁）中指出的方法，先根據三邊作所求三角形的極線三角形，因爲

$$a'=180°-A$$

$$b'=180°-B$$

$$c'=180°-C.$$

所以三邊爲已知。

然後取A', B', C'爲極，作每一個的極線；這些極線相交構成所求球面三角形。

問題 5　通過三點A, B, C作小圓；並求其球面中心和球面半徑。

作三角形 ABC 並平分其邊，再找出各邊的極。然後通過每邊的極及其中點作大圓弧，這些大圓弧交於一點(檢查作圖)，這一點卽是通過頂點 A, B, C 的外接小圓的球面中心。

測量從球面中心到 A, B, C 等點的球面距離，卽得所求球面半徑。

第二編　球面三角

§1　導論

球面三角的任務是根據足够的條件解球面三角形，即確定未知的邊和角。爲此目的必須而且充足的是，在每一場合球面三角形的包含三個已知元素的四個元素由方程式連繫起來。因爲在每一球面三角形中都有六個元素(三個邊和三個角)，所以解球面三角形歸結爲六個基本問題，在這些問題中以下各元素爲已知(圖 43)：

1. 三邊 a, b, c。
2. 三角 A, B, C。
3. 兩邊及其夾角 —a, b, C。
4. 兩角及其夾邊 —a, B, C。
5. 兩邊及其中之一的對角 —a, b, A。
6. 兩角及其中之一的對邊 —A, B, a。

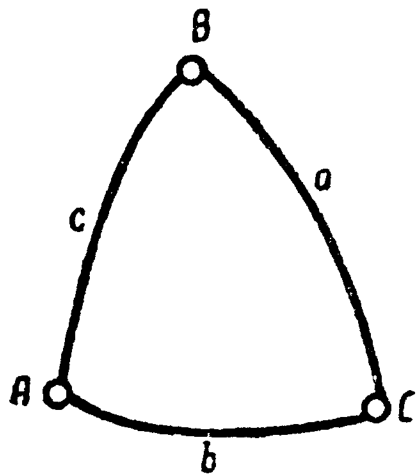


圖 43

在平面三角中由於各角中間存在關係式 $A+$ $+B+C=180°$,所以第二種情形除外而第四種情况和第六種情形相同。

在球三角中解球面三角形的這六種情形可以歸納爲三種情形，即第一種第三種和第五種，因爲第二種第四種和第六種情形歸納爲藉極線三角形的幫助求解的問題。

§2　球面三角形邊的餘弦公式[1)]

以下兩個著名定理是球面三角形邊的餘弦公式的推理根據。

1）阿剌伯數學家亞爾·巴丹得出的邊的餘弦公式,一般認爲是球面三角的基本公式,因爲能用解析變換的方法從它推出其餘一切球面三角的公式。然而應當知道,這種說法不過是約定的，因爲也能從其他關係式推出所有球面三角的公式,這些關係式我們以後將要講到。

定理 1　平面上任意閉多邊形邊的射影的代數和等於零；假設不是閉多邊形，則各邊射影的代數和等於閉合邊在射影軸上的射影。

定理 2　直線在軸上的垂直投影等於被投線段的長度乘以該線段和軸的交角的餘弦。

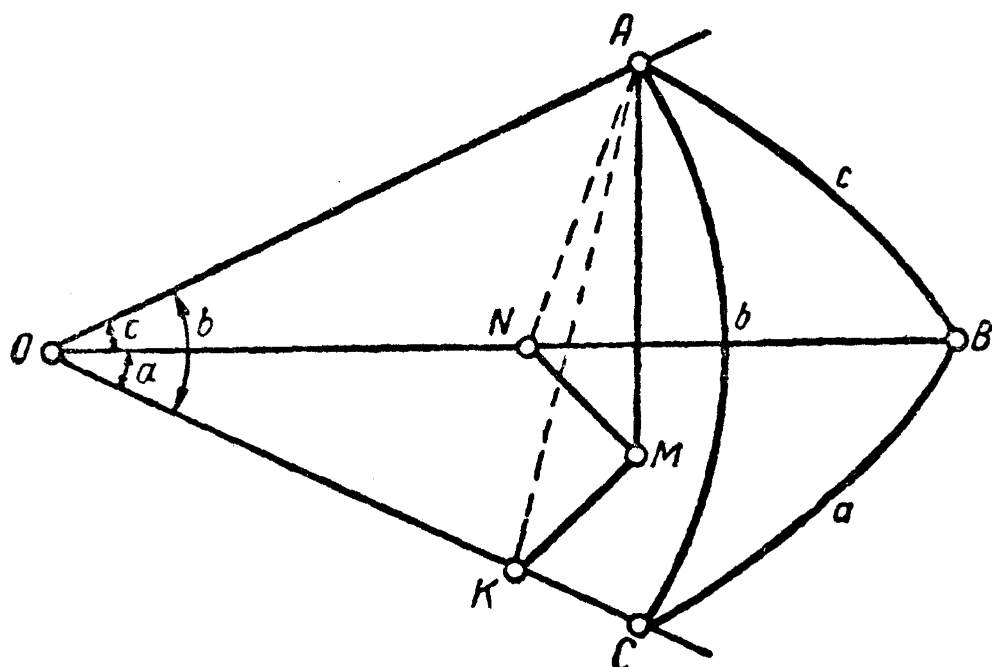


圖 44

設三直線 OA, OB, OC 的線束構成以 O 爲頂點的三面角及平面角 AOB, BOC, AOC, 分別等於 c, a, b；各面中間的角，卽側平面的傾角，我們用 A, B, C 來表示（圖 44）。

中心在三面角頂點半徑爲 R 的球面截三面角於球面三角形 ABC, 這個球面三角形的邊等於平面角 a, b, c, 而它的角等於三面角的線性角。從球面三角形的任一頂點，例如，A 點向面 BOC 作垂線 AM, 通過直線 AM 作平面 AMN 和 AMK, 垂直於稜 OB 和 OC, 於是得

$$\angle MNA = B,\ \angle MKA = C,\ \angle AOB = c,$$

$$\angle BOC = a,\ \angle AOC = b.$$

取折線 $OKMN$ 在 ON 上的投影，有（圖 44）：

$$\underset{\text{在}ON\text{上}}{\text{投影}\,ON} = \underset{\text{在}ON\text{上}}{\text{投影}\,OK} + \underset{\text{在}ON\text{上}}{\text{投影}\,KM} + \underset{\text{在}ON\text{上}}{\text{投影}\,MN}$$

用 R 表 OA—球半徑，我們來研究四角形 $ONMK$ 每邊的長度，於是

$$ON = R\cos c,\ \text{卽}\ \underset{\text{在}ON\text{上}}{\text{投影}\,ON} = R\cos c$$

$$OK = R\cos b,\ \text{卽}\ \underset{\text{在}ON\text{上}}{\text{投影}\,OK} = R\cos b\cos a$$

$$KM = KA\cos C,$$

但因爲

$$KA = OA\sin b,$$

所以 $KM = OA \cdot \sin b \cos C$

或 $\underset{\text{在}ON\text{上}}{\text{投影}KM} = OA \cdot \sin b \cos C \cos(90° - a) = R \sin b \sin a \cos C$.

代入,得 $R \cos c = R \cos b \cos a + R \sin a \sin b \cos C$.

約去 R,得公式

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

這個公式可以讀成這樣:球面三角形邊的餘弦等於其他兩邊餘弦的乘積加上它們的正弦及它們夾角的餘弦的連乘積。

得到的公式適用於球面三角形的每一邊。因此,有:

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B\\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.\end{aligned}\right\} \quad (5)\text{a}$$

在邊 a, b, c 和球半徑R比起來很小的時候,球面三角形可以看成是平面三角形。

把邊的正弦展成級數,並僅取前一項,有

$$\sin\frac{a}{R} = \frac{a}{R},$$

$$\sin\frac{b}{R} = \frac{b}{R},$$

$$\sin\frac{c}{R} = \frac{c}{R}.$$

同樣把邊的餘弦也展成級數並僅取前二項,有

$$\cos\frac{a}{R} = 1 - \frac{a^2}{2R^2},$$

$$\cos\frac{b}{R} = 1 - \frac{b^2}{2R^2},$$

$$\cos\frac{c}{R} = 1 - \frac{c^2}{2R^2}.$$

把這些值代入球面三角形餘弦公式:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

得
$$\left(1-\frac{c^2}{2R^2}\right)=\left(1-\frac{a^2}{2R^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2R^2}\right)+\frac{ab}{R^2}\cos C,$$

或
$$c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos C-\frac{a^2b^2}{2R^2}.$$

$\frac{a^2b^2}{2R^2}$ 一項較之前幾項很小，可以略去，所以得到平面三角中著名的餘弦定律：

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

§ 3　正弦公式

取三角形 AMK 和 AMN 的公共邊 AM(圖 44)；為投影軸；於是：

$$\underset{\text{在}AM\text{上}}{\text{投影}\,AM}=\underset{\text{在}AM\text{上}}{\text{投影}\,AK}+\underset{\text{在}AM\text{上}}{\text{投影}\,KM}=\underset{\text{在}AM\text{上}}{\text{投影}\,AN}+\underset{\text{在}AM\text{上}}{\text{投影}\,NM}$$

$$\underset{\text{在}AM\text{上}}{\text{投影}\,AK}=R\sin b\cdot\cos(90^\circ-C)$$

$$\underset{\text{在}AM\text{上}}{\text{投影}\,KM}=R\cos C\sin b\cos 90^\circ=0$$

$$\underset{\text{在}AM\text{上}}{\text{投影}\,AN}=R\sin c\cdot\cos(90^\circ-B)$$

$$\underset{\text{在}AM\text{上}}{\text{投影}\,NM}=R\sin c\cos B\cos 90^\circ=0.$$

代入，得　$R\sin c\cos(90^\circ-B)=R\sin b\cos(90^\circ-C)$

或
$$\frac{\sin c}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin B};$$

或
$$\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\sin b}{\sin B}.$$

同樣能够推出
$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin c}{\sin C}.$$

從此得
$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}. \qquad (5)6$$

正弦公式讀成這樣：球面三角形邊的正弦的比等於對應角正弦的比。

這個公式也能用以下解析方法從餘弦公式推出：

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$

$$\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B.$$

等號前後分別相加，得：

$$\cos a+\cos b=\cos c(\cos a+\cos b)+\sin c\,(\sin b\cos A+\sin a\cos B),$$

相減，得：

$$\cos a-\cos b=\cos c\,(\cos b-\cos a)+\sin c\,(\sin b\cos A-\sin a\cos B).$$

把 $\cos c\,(\cos a+\cos b)$ 和 $\cos c\,(\cos b-\cos a)$ 移到等號左邊並把此兩方程式等號前後分別相乘，得：

$$(\cos^2 a-\cos^2 b)\,(1-\cos^2 c)=\sin^2 c\,(\sin^2 b\cos^2 A-\sin^2 a\cos^2 B).$$

用正弦代餘弦並用 $\sin^2 c$ 代 $(1-\cos^2 c)$，得：

$$[(1-\sin^2 a)-(1-\sin^2 b)]\sin^2 c=\sin^2 c\,[\sin^2 b\,(1-\sin^2 A)-$$

$$-\sin^2 a\,(1-\sin^2 B)];$$

約簡，得

$$\sin^2 a\sin^2 B=\sin^2 b\sin^2 A\,.$$

用 $\sin^2 A\sin^2 B$ 除等號兩邊並開平方，得

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}\,.$$

雙重符號去掉不要，因爲所研究的三角形的邊都小於 180°。

這樣能推出關係式

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}\,.$$

按照前面當邊 a, b, c 和球半徑 R 相比很小時球面三角形可以看成平面三角形的論斷，球面三角形的正弦公式

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

可以表示成這樣：

$$\frac{\frac{a}{R}}{\sin A}=\frac{\frac{b}{R}}{\sin B}=\frac{\frac{c}{R}}{\sin C},$$

因此，這個公式轉化爲平面三角正弦公式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\,.$$

§ 4　角的餘弦公式

極線三角形邊的餘弦公式是:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

把極線三角形中的元素代以原三角形中對應的元素，得

$$\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B)\cos(180^\circ - C) +$$
$$+ \sin(180^\circ - B)\sin(180^\circ - C)\cos(180^\circ - a);$$

乘以 -1，得

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

循環代換得

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$

即任一球面三角形中任一角的餘弦等於其餘兩角餘弦乘積的負值加上此兩角的正弦及其夾邊的餘弦的連乘積。

§ 5　球面三角形五個元素的公式

取 NM 邊為投影軸（圖 44），根據投影理論，得:

$$\underset{\text{在}NM\text{上}}{\text{投影}\ NM} = \underset{\text{在}NM\text{上}}{\text{投影}\ NO} + \underset{\text{在}NM\text{上}}{\text{投影}\ OK} + \underset{\text{在}NM\text{上}}{\text{投影}\ KM}$$

$$\underset{\text{在}NM\text{上}}{\text{投影}\ NM} = OA \sin c \cos B \cos 0^\circ = OA \sin c \cos B$$

$$\underset{\text{在}NM\text{上}}{\text{投影}\ NO} = AO \cos c \cos 90^\circ = 0$$

$$\underset{\text{在}NM\text{上}}{\text{投影}\ OK} = OA \cos b \cos(90^\circ - a) = OA \cos b \sin a$$

$$\underset{\text{在}NM\text{上}}{\text{投影}\ KM} = OA \sin b \cos C \cos(180^\circ - a) = -OA \sin b \cos C \cos a。$$

代入，得

$$OA \sin c \cos B = OA \cos b \sin a - OA \sin b \cos a \cos C$$

或

$$\left.\begin{aligned}
&\sin c\cos B=\sin a\cos b-\cos a\sin b\cos C\\
&\quad\text{同樣可以得到}\\
&\sin a\cos B=\sin c\cos b-\cos c\sin b\cos A\\
&\sin a\cos C=\sin b\cos c-\cos b\sin c\cos A\\
&\sin b\cos A=\sin c\cos a-\cos c\sin a\cos B\\
&\sin b\cos C=\sin a\cos c-\cos a\sin c\cos B\\
&\sin c\cos A=\sin b\cos a-\cos b\sin a\cos C.
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

得到的公式可以讀成這樣(圖 45): 一邊的正弦和其隣角餘弦的乘積等於此隣角另一隣邊的正弦和第三邊的餘弦的乘積減去此另一隣邊的餘弦乘第三邊的正弦再乘以它們夾角的餘弦的連乘積。

§ 6 角的正弦和隣邊餘弦的乘積公式

把前面球面三角形五個元素的公式應用到極線三角形,有

$$\sin a'\cos C'=\sin b'\cos c'-\cos b'\sin c'\cos A',$$

但因爲原三角形和極線三角形的關係是相互的,所以有

$$a'=180^\circ-A;\ c'=180^\circ-C\ \text{以及其他等等。}$$

代入並在等號兩邊乘以 -1, 得:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin A\cos c=\sin B\cos C+\cos B\sin C\cos a;\\
&\quad\text{同樣可以得到其餘五個公式}\\
&\sin A\cos b=\sin C\cos B+\cos C\sin B\cos a\\
&\sin B\cos a=\sin C\cos A+\cos C\sin A\cos b\\
&\sin B\cos c=\sin A\cos C+\cos A\sin C\cos b\\
&\sin C\cos a=\sin B\cos A+\cos B\sin A\cos c\\
&\sin C\cos b=\sin A\cos B+\cos A\sin B\cos c.
\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

這些公式可以讀成這樣(圖 46): 一角的正弦和其隣邊餘弦的乘積等於此隣邊另一隣角的正弦和第三角的餘弦的乘積加上此另一隣角的餘弦乘以第三角的正弦再乘以它們夾邊的餘弦的連乘積。

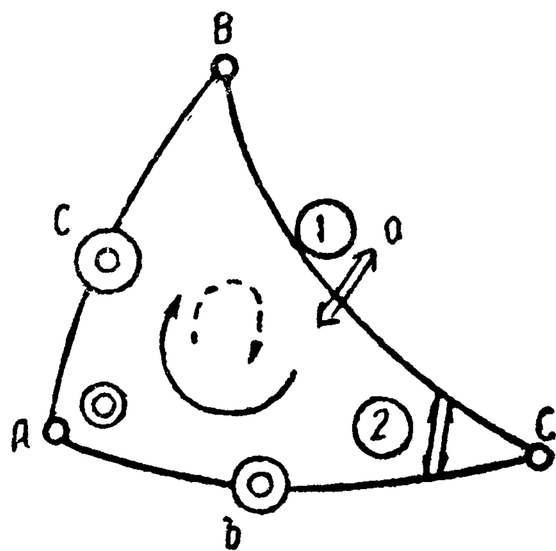


圖 45

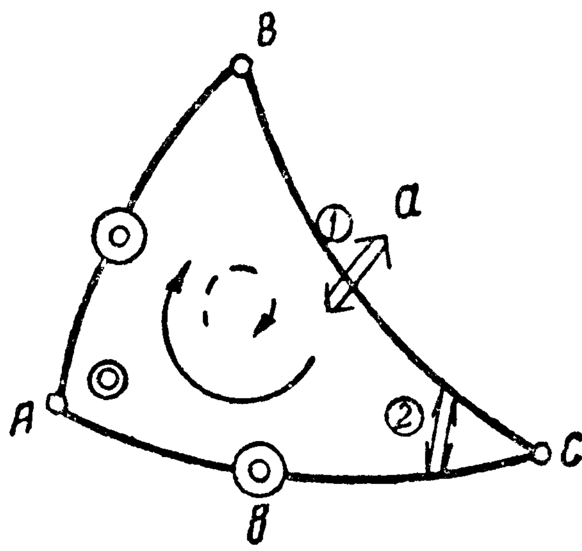


圖 46

§ 7　球面三角形相隣四元素間的關係式或餘切公式

有：
$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A;$$
用 $\sin b$ 除等式兩邊，得
$$\cos B \frac{\sin a}{\sin b} = \sin c \operatorname{ctg} b - \cos c \cos A .$$
根據正弦公式得：
$$\cos B \frac{\sin A}{\sin B} = \operatorname{ctg} b \sin c - \cos c \cos A$$
或
$$\operatorname{ctg} B \sin A = \operatorname{ctg} b \sin c - \cos c \cos A . \qquad (8)$$
同樣可以推出其餘各公式：
$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{ctg} A \sin C &= \operatorname{ctg} a \sin b - \cos b \cos C \\
\operatorname{ctg} A \sin B &= \operatorname{ctg} a \sin c - \cos c \cos B \\
\operatorname{ctg} B \sin C &= \operatorname{ctg} b \sin a - \cos a \cos C \\
\operatorname{ctg} C \sin B &= \operatorname{ctg} c \sin a - \cos a \cos B \\
\operatorname{ctg} C \sin A &= \operatorname{ctg} c \sin b - \cos b \cos A.
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

所以，在任何球面三角形中存在以下的關係（圖 47）：界角餘切和中間角正弦的乘積等於界邊餘切和中間邊正弦的乘積減去中間邊餘弦和中間角餘弦的乘積。

顯然，公式(8)還可以寫成這樣：

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{ctg} a \sin c &= \operatorname{ctg} A \sin B + \cos c \cos B \\
\operatorname{ctg} a \sin b &= \operatorname{ctg} A \sin C + \cos b \cos C \\
\operatorname{ctg} b \sin a &= \operatorname{ctg} B \sin C + \cos a \cos C \\
\operatorname{ctg} b \sin c &= \operatorname{ctg} B \sin A + \cos c \cos A \\
\operatorname{ctg} c \sin a &= \operatorname{ctg} C \sin B + \cos a \cos B \\
\operatorname{ctg} c \sin b &= \operatorname{ctg} C \sin A + \cos b \cos A.
\end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

這些公式是這樣讀法：界邊餘切和中間邊正弦的乘積等於界角餘切和中間角正弦的乘積加上中間邊餘弦和中間角餘弦的乘積。

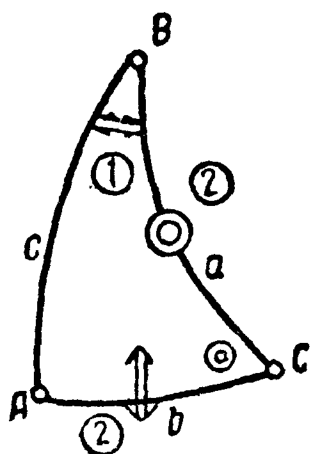


圖　47

以上導出的六個基本公式可用來解球面三角形，因為利用這些公式根據三個已知元素永遠可以確定其餘三個未知元素。

但用這些公式來解球面三角形實際上是不方便的，因為它們不是對數的形式，所以在應用時必需作若干次對數和眞數的換算，而這時常常又需要附加計算。例如在利用邊的餘弦公式時需要查 18 個對數，而這些對數分佈在表中不同的 15 頁上。

利用補助角或者利用和差對數計算表可以在某種程度上化簡計算；在這種場合下需要找 12 個對數而這些數分佈在表的 9 頁上；在球面三角形的邊或角接近 0° 或 180° 時，餘弦計算不够精確，因為在這種場合下這些角的餘弦變化極慢。所以導出的公式沒有實際用處而僅能用以推出對數形公式來，而用這些對數形式的公式來解球面三角形是很簡單而且精確的。在求出解球面任意三角形的這些便利的公式以前，我們先求解球面直角三角形的公式。

§ 8　球面直角三角形

設在球面三角形 ABC（圖 48）中角 A 是直角；於是根據前面的定義，這樣的球面三角形叫做球面直角三角形。在解球面直角三角形時，

很明顯的，只要有兩個已知元素就够了，因爲第三個——直角——已經知道。解球面直角三角形的問題，有以下六種情形：

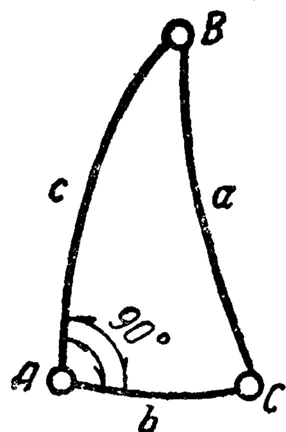


圖 48

1. 已知直角邊 b 和 c，求 a, B, C。
2. 已知斜邊 a 直角邊 b 或 c，求 B, C 和 c 或 b。
3. 已知兩角 B 和 C，求 a, b, c。
4. 已知斜邊 a 角 B 或 C，求 b, c，和 C 或 B。
5. 已知直角邊 b 和隣角 C，求 a, c 和 B。
6. 已知直角邊 b 和對角 B，求 a, c 和 C。

因爲在球面直角三角形中角 A 是直角，所以，很明顯的，所有前面對球面任意三角形導出的公式中的 A 角在這裏都有：

$$\sin A=1, \quad \cos A=0 .$$

由此得出以下解球面直角三角形的公式的表。

球面任意三角形	球面直角三角形
1. $\cos a=\cos b \cos c+\sin b \sin c \cos A$	1. $\cos a=\cos b \cos c$
2. $\cos B=-\cos A \cos C+\sin A \sin C \cos b$	2. $\cos B=\sin C \cos b$
3. $\cos C=-\cos A \cos B+\sin A \sin B \cos c$	3. $\cos C=\sin B \cos c$
4. $\cos A=-\cos B \cos C+\sin B \sin C \cos a$	4. $\cos a=\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$
5. $\dfrac{\sin a}{\sin A}=\dfrac{\sin b}{\sin B}$	5. $\sin b=\sin a \sin B$
6. $\dfrac{\sin a}{\sin A}=\dfrac{\sin c}{\sin C}$	6. $\sin c=\sin a \sin C$
7. $\operatorname{ctg} a \sin b=\cos b \cos C+\sin C \operatorname{ctg} A$	7. $\cos C=\operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b$
8. $\operatorname{ctg} a \sin c=\cos c \cos B+\sin B \operatorname{ctg} A$	8. $\cos B=\operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c$
9. $\operatorname{ctg} b \sin c=\cos c \cos A+\sin A \operatorname{ctg} B$	9. $\sin c=\operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B$
10. $\operatorname{ctg} c \sin b=\cos b \cos A+\sin A \operatorname{ctg} C$	10. $\sin b=\operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C$

這十個公式包括在一切情形下解球面直角三角形所需要的公式。

要在實際應用中記住這些公式有很大的困難，所以在解球面直角三角形時最方便的是應用以圖形表示的下列心記規則（圖 49，圖解 1 和圖解 2）。

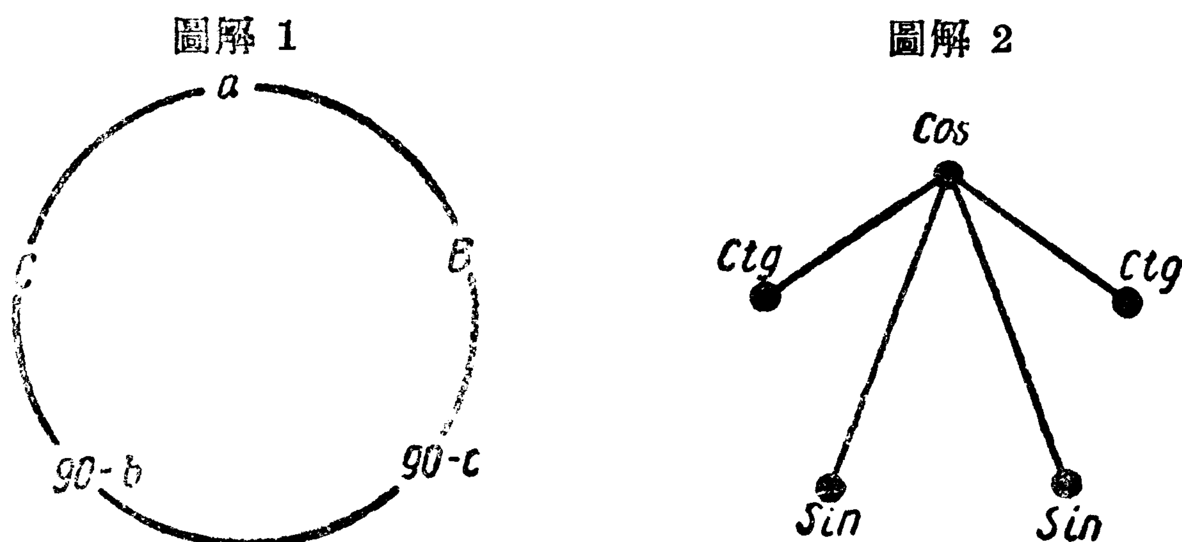


圖 49

在應用時把圖解 2 放在圖解 1 上；例如，把圖解 2 的餘弦放在圖解 1 的 a 上；於是餘切和 C 及 B 重合而正弦和 $(90°-b)$ 及 $(90°-c)$ 重合；從這裏得出公式：

$$\cos a=\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$$

和
$$\cos a=\sin(90°-b)\sin(90°-c)=\cos b\cos c.$$

把圖解 2 對圖解 1 循序旋轉可以得出球面直角三角形的其餘八個公式。

要記住圖解 1 和圖解 2 並不困難，因爲它們是對稱的。

這個以圖形表示的心記規則可以表述如下。

把球面直角三角形的直角邊用 90° 減去它們所得的差來代替，我們有：球面三角形每一元素的餘弦都等於相隣二元素餘切的乘積或不相隣二元素正弦的乘積。

前面導出的解球面直角三角形的公式也能直接用幾何方法導出。

按照圖 50, 在三角形 OBS 和 OTS 中有：

$$OB=OS\cos a,$$
$$OB=OT\cos c,$$
$$OT=OS\cos b.$$

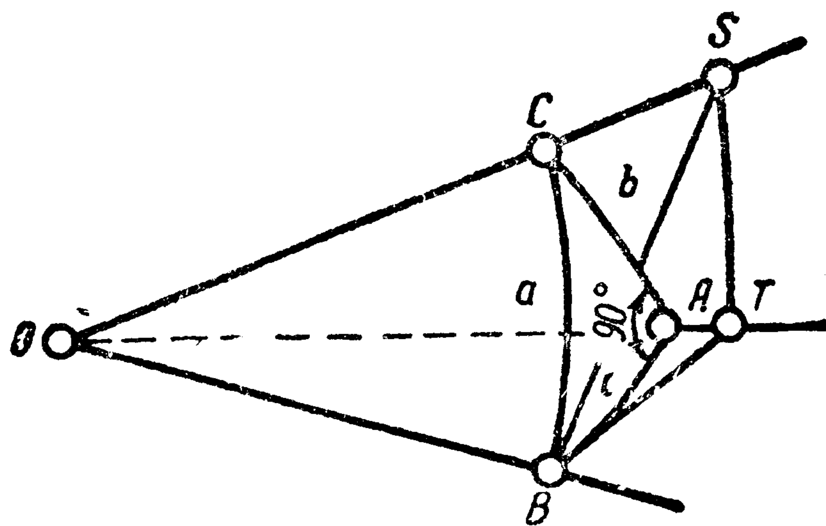


圖 50

寫下恆等式

$$\frac{OB}{OS}=\frac{OT}{OS}\cdot\frac{OB}{OT}$$

把 OB 等用上面等式右邊的部分代入，得

$$\frac{OS\cos a}{OS}=\frac{OS\cos b}{OS}\cdot\frac{OT\cos c}{OT};$$

化簡，得 $$\cos a=\cos b\cos c.$$

假設直角三角形的邊 a, b, c 比起球半徑 R 來很小，那麼球面三角形可以看成平面三角形。於是取

$$\sin b=b,\ *$$

$$\sin c=c,$$

$$\cos b=1-\frac{b^2}{2R},$$

$$\cos c=1-\frac{c^2}{2R},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{R}=\frac{a}{R},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{R}=\frac{b}{R},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{R}=\frac{c}{R},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{R}=\frac{R}{a},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{b}{R}=\frac{R}{b},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{c}{R}=\frac{R}{c},$$

此處把正切和餘切展成級數並僅取第一項。

把這些值代入球面直角三角形的公式中，我們得到平面直角三角形的公式：

---

*（譯者註：此處凡 a, b, c 等字母下面無分母 R 者均表邊的弧度數，凡此等字母下面有分母 R 者均表邊的長度，原文未能區別清楚）。

<table>
<tr><th>球面直角三角形</th><th>平面直角三角形</th></tr>
<tr><td>1. $\cos a=\cos b\cos c$</td><td>1. $1-\frac{a^2}{2R^2}=\left(1-\frac{b^2}{2R^2}\right)\left(1-\frac{C^2}{2R^2}\right)=1-\frac{b^2}{2R^2}-\frac{c^2}{2R^2}+\frac{b^2c^2}{4R^4}$
因為$\frac{b^2c^2}{4R^4}$足四級無限小可以略去，所以得：
$a^2=b^2+c^2$</td></tr>
<tr><td>2. $\sin b=\sin a\sin B$</td><td>2. $b=a\sin B$</td></tr>
<tr><td>3. $\sin c=\sin a\sin C$</td><td>3. $c=a\sin C$</td></tr>
<tr><td>4. $\cos C=\mathrm{ctg}\, a\,\mathrm{tg}\, b$</td><td>4. $b=a\cos C$</td></tr>
<tr><td>5. $\cos B=\mathrm{ctg}\, a\,\mathrm{tg}\, c$</td><td>5. $c=a\cos B$</td></tr>
<tr><td>6. $\sin c=\mathrm{tg}\, b\,\mathrm{ctg}\, B$</td><td>6. $c=b\,\mathrm{ctg}\, B$</td></tr>
<tr><td>7. $\sin b=\mathrm{tg}\, c\,\mathrm{ctg}\, B$</td><td>7. $b=c\,\mathrm{ctg}\, C$</td></tr>
</table>

§ 9 球面直邊三角形

有一邊等於 90° 的球面三角形叫做球面直邊三角形。

要解球面直邊三角形只要有兩個已知元素就够了，因為第三個元素——邊——等於 90° 已經知道。

要得到解球面直邊三角形的公式只需在球面任意三角形的公式中用一代替 $\sin a$ 用零代替 $\cos a$ 和 $\mathrm{ctg}\, a$，因為若 $a=90°$；則 $\sin a=1$，$\cos a=0$，$\mathrm{ctg}\, a=0$。

球面直邊三角形公式表引錄在下面，這些公式是從球面任意三角形的公式得出的。

球面任意三角形	球面直邊三角形
1. $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$	1. $\cos A=-\mathrm{ctg}\, b\,\mathrm{ctg}\, c$
2. $\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B$	2. $\cos b=\sin c\cos B$
3. $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$	3. $\cos c=\sin b\cos C$
4. $\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{\sin A}{\sin B}$	4. $\sin B=\sin b\sin A$
5. $\frac{\sin a}{\sin c}=\frac{\sin A}{\sin C}$	5. $\sin C=\sin c\sin A$
6. $\mathrm{ctg}\, b\sin a=\mathrm{ctg}\, B\sin C+\cos a\cos C$	6. $\mathrm{ctg}\, b=\mathrm{ctg}\, B\sin C$
7. $\mathrm{ctg}\, c\sin a=\mathrm{ctg}\, C\sin B+\cos a\cos B$	7. $\mathrm{ctg}\, c=\sin B\,\mathrm{ctg}\, C$
8. $\mathrm{ctg}\, a\sin c=\mathrm{ctg}\, A\sin B+\cos c\cos B$	8. $\mathrm{ctg}\, A=-\mathrm{ctg}\, B\cos c$
9. $\mathrm{ctg}\, a\sin b=\mathrm{ctg}\, A\sin C+\cos b\cos C$	9. $\mathrm{ctg}\, A=-\mathrm{ctg}\, C\cos b$
10. $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$	10. $\cos A=-\cos B\cos C$

為了當實際應用時記住這些公式應該像記憶球面直角三角形的公式一樣利用圖形表示的心記規則（圖 51）。

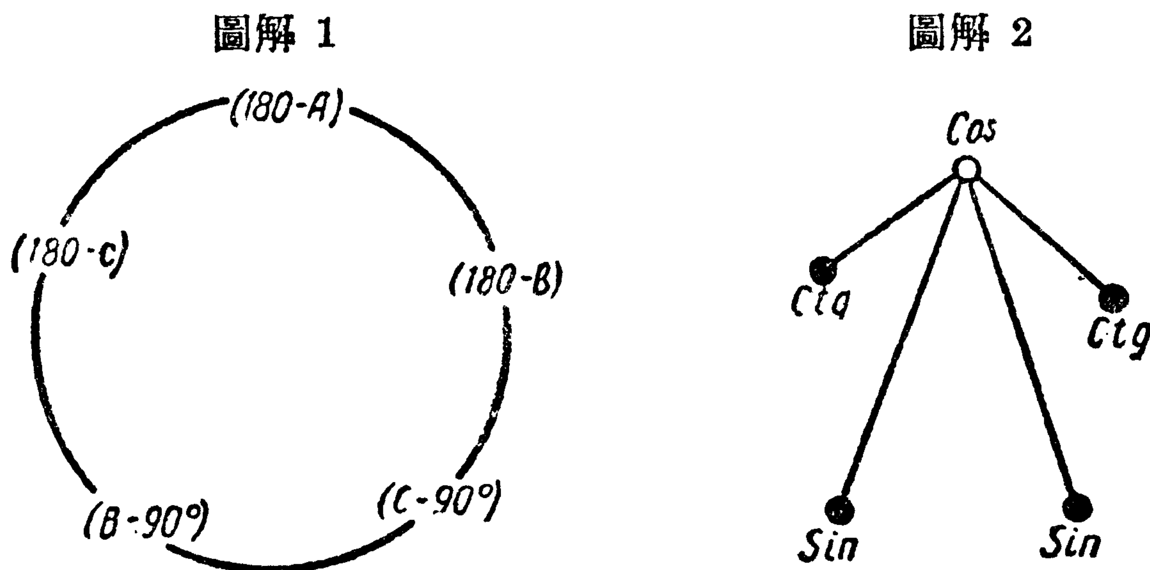


圖　51

把圖解 2 放在圖解 1 上並把它對圖解 1 旋轉可以得到所有十個解直邊三角形的公式。

§ 10　球面直角三角形解法

在解球面直角三角形以先必須注意以下事項：如果球面直角三角形某元素是以它的 cos, tg 或 ctg 求出，則解答常是唯一的，因為這些三角函數對銳角是正的對鈍角是負的。如果某元素是以它的 sin 求出，則解答有兩個，因為銳角的 sin 和它的補角的 sin 相等。在這種情形下必須利用以下論斷：

a）假設球面直角三角形的直角邊 b 和 c 同時大於 $90°$ 或小於 $90°$，則按公式

$$\cos a = \cos b \cos c$$

斜邊 a 小於 $90°$，因為在這兩種情形 $\cos a$ 都有正號。

假設 $b<90°$ 而 $c>90°$ 或 $b>90°$ 而 $c<90°$，則按照上面同一個公式，斜邊 a 大於 $90°$，因為在這兩種情形 $\cos a$ 都有負號。

所以：

假設球面直角三角形的直角邊都大於 $90°$ 或都小於 $90°$，則斜邊小於 $90°$。假設有一直角邊大於 $90°$ 而另一個小於 $90°$，則斜邊大於 $90°$。

б）因為 $\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$，所以當 $B<90°$ 且 $C<90°$ 或 $B>90°$ 且 $C>90°$ 時，斜邊 $a<90°$，因為在這兩種情形 $\cos a$ 都有正號。

當 $B<90°$ 而 $C>90°$ 或當 $B>90°$ 而 $C<90°$ 時，$\cos a$ 有負號，所以斜邊 $a>90°$。

所以:

假設球面直角三角形斜邊的隣角同時都大於或都小於 90°，則斜邊小於 90°。假設有一角大於 90° 而另一角小於 90°，則斜邊大於 90°。

в）$\cos B = \sin C \cos b$

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sin c}{\operatorname{ctg} B}$$

因為在球面三角形中 $\sin C$ 和 $\sin c$ 常是正值，所以 $\cos B$ 和 $\operatorname{tg} b$ 的符號單獨靠 $\cos b$ 和 $\operatorname{ctg} B$ 的符號來確定。

從此推出:

假設直角三角形的直角邊大於 90°，則它的對角也大於 90°。假設直角邊小於 90°，則它的對角也小於 90°。反之亦然。

例子:

1. 在球面直角三角形中已知直角邊 $b=48°27'21''$，$c=33°07'37''$。求斜邊 a 和角 B 及角 C。

有下面的公式:

$$\text{I.}\quad \cos a = \cos b \cos c.$$

$$\text{II.}\quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}.$$

$$\text{III.}\quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

解是唯一的；表值 9；表頁 5。

lg cos b lg cos c	9.82164 9.92297	lg tg b ∂lg sin c	0.05252 0.26241	lg tg c ∂lg sin b	9.81462 0.12584
lg cos a	9.74461	lg tg B	0.31493	lg tg C	9.94046
a	56°15′42″	B	64°09′42″	C	41°05′05″

2. 在球面直角三角形中已知：角 $B = 58°40'13''$ 及其相隣直角邊 $c=37°54'06''$。

求斜邊 a, 另一直角邊 b 及角C。

有必需的公式：

$$\text{I. } \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B \sin c.$$

$$\text{II. } \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos B}.$$

$$\text{III. } \cos C = \sin B \cos c.$$

解是唯一的；表値 9；表頁 5。

lg tg B	0.21558	lg tg c	9.89127	lg sin B	9.93155
lg sin c	9.78839	lg cos B	0.28403	lg cos c	9.89712
lg tg b	0.00397	lg tg a	0.17530	lg cos C	9.82867
b	45°15′42″	a	56°15′42″	C	47°37′21″

3. 在球面直角三角形中已知角 $B=64°09'41''$, 角 $C = 41°32'39''$。求斜邊 a 及兩直角邊 b 和 c。

有公式：

$$\text{I. } \cos B = \sin C \cos b \text{ 或 } \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}.$$

$$\text{II. } \cos C = \sin B \cos c \text{ 或 } \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

$$\text{III. } \operatorname{ctg} C = \operatorname{tg} B \cos a \text{ 或 } \cos a = \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} B.$$

解是唯一的；表値 9；表頁 5。

lg cos B	9.63932	lg cos C	9.87416	lg ctg B	9.68507
∂lg sin C	0.17836	∂lg sin B	0.04575	lg ctg C	0.05251
lg cos b	9.81768	lg cos c	9.91991	lg cos a	9.73758
b	48°54′55″	c	33°44′18″	a	56°52′25″

4. 在球面直角三角形中已知：角 $B=65°58'47''$, 斜邊 $a = 40°33'50''$。求直角邊 b 和 c 及角 C。

有公式:

$$\text{I. } \sin a=\frac{\sin b}{\sin B} \text{ 或 } \sin b=\sin a \sin B.$$

$$\text{II. } \cos B=\frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a} \text{ 或 } \operatorname{tg} c=\cos B \operatorname{tg} a.$$

$$\text{III. } \operatorname{ctg} C=\operatorname{tg} B \cos a.$$

雖然 b 是按 sin 求出，但因爲，在球面直角三角形中若角小於 $90°$，則其相對直角邊也小於 $90°$，所以解仍是唯一的。

lg sin a	9.81312	lg cos B	9.60966	lg tg B	0.35101
lg sin B	9.96066	lg tg a	9.93248	lg cos a	9.88063
lg sin b	9.77378	lg tg c	9.54214	lg ctg C	0.23164
b	36°26′28″	c	19°12′40″	C	30°23′50″

5. 在球面直角三角形中已知：直角邊 $b=42°22'39''$，斜邊 $a=61°33'04''$。求直角邊 c 及角 B 和角 C。

有以下公式

$$\text{I. } \cos C=\operatorname{tg} b \operatorname{ctg} a.$$

$$\text{II. } \cos a=\cos b \cos c \text{ 或 } \cos c=\frac{\cos a}{\cos b}.$$

$$\text{III. } \sin b=\sin B \sin a \text{ 或 } \sin B=\frac{\sin b}{\sin a}.$$

按照前例中引用的論斷，解仍是唯一的。

雖然角 B 是按正弦確定的，但因爲直角邊及其對角同時爲銳或同時爲鈍，所以答案仍是唯一的。

lg tg b	9.96019	lg cos a	9.67795	lg sin b	9.82867
lg ctg a	9.73384	clg cos b	0.13152	clg sin a	0.05589
lg cos C	9.69403	lg cos c	9.80947	lg sin B	9.88456
C	60°22′26″	c	49°50′40″	B	50°02′54″

6. 在球面直角三角形中已知：直角邊 $b=29°31'40''$，其對角 $B=$

$=60°28'05''$。求斜邊 a，直角邊 c 及其對角 C。

有公式

$$\text{I. } \sin c=\operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b;$$

$$\text{II. } \sin b=\sin B \sin a \text{ 或 } \sin a=\frac{\sin b}{\sin B};$$

$$\text{III. } \cos B=\cos b \sin C \text{ 或 } \sin C=\frac{\cos B}{\cos b}.$$

按定理：如兩直角邊同時大於或小於 90°，則斜邊小於 90°，如一直角邊大於 90° 而另一小於 90°，則斜邊大於 90°；本題有兩個解。

$\lg \operatorname{ctg} B$ $\lg \operatorname{tg} b$	9.75321 9.75313	$\lg \sin b$ $\partial \lg \sin B$	9.69271 0.06044	$\lg \cos B$ $\partial \lg \cos b$	9.69277 0.06042
$\lg \sin c$	9.50634	$\lg \sin a$	9.75315	$\lg \sin C$	9.75319
c_1	18°42'58''	a_1	34°30'07''	C_1	34°30'20''
c_2	161°17'02''	a_2	145°29'53''	C_2	145°29'40''

§ 11　解球面任意三角形的公式

像前面指出的，由於不是對數的形式，球面三角的基本公式在實際應用中很不方便，所以通常總是用球面三角的革新公式。

I. 用邊的函數定角的任意三角形公式

a）半角正弦公式

爲了求出一角和三邊的關係：取邊的餘弦公式：

$$\cos a=\cos b \cos c+\sin b \sin c \cos A.$$

從平面三角知道：

$$\sin \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

或

$$\cos A=1-2 \sin ^{2} \frac{A}{2}.$$

代入,得

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c-2\sin^2\frac{A}{2}\sin b\sin c,$$

但因為 $$\cos(b-c)=\sin b\sin c+\cos b\cos c,$$

所以 $$\cos a=\cos(b-c)-2\sin^2\frac{A}{2}\sin b\sin c,$$

由此得 $$2\sin^2\frac{A}{2}\sin b\sin c=\cos(b-c)-\cos a.$$

因為餘弦的差等於半和正弦和半差正弦的乘積的二倍，所以用二約後得:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\sin c}.$$

用 $2p$ 表球面三角形三邊的和,有:

$$a+b+c=2p;\quad a+b-c=2p-2c;$$

$$a+c-b=2p-2b.$$

代入,得: $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}.$$

同樣對球面三角形其餘兩角得:

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}.$$

因為所研究的球面三角形的角都小於180°,所以根號前僅取正號。為了方便起見引入以下約定的記號:

$$\left.\begin{aligned}(p-a)&=p_a,\\(p-b)&=p_b,\\(p-c)&=p_c.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(I)}$$

採用這些記號後半角正弦公式變成以下形式:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p_b\sin p_c}{\sin b\sin c}},\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p_a\sin p_c}{\sin a\sin c}},\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p_a\sin p_b}{\sin a\sin b}}.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

6）半角餘弦公式

倣前取邊的餘弦公式

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A;$$

因爲
$$\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1,$$

所以得
$$\cos a=\cos b\cos c-\sin b\sin c+2\cos^2\frac{A}{2}\sin b\sin c;$$

因爲
$$\cos(b+c)=\cos b\cos c-\sin b\sin c,$$

所以
$$\cos a=(b+c)+2\cos^2\frac{A}{2}\sin b\sin c,$$

或
$$2\cos^2\frac{A}{2}\sin b\sin c=\cos a-\cos(b+c).$$

因爲餘弦的差等於半和正弦和半差正弦的乘積的二倍，所以用二約以後得:

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin e}.$$

用 $2p$ 表球面三角形三邊的和得:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}$$

同樣對球面三角形其餘兩角得:

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}$$

採用（I）中約定的記號得:

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin p_a}{\sin b\sin c}},\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin p_b}{\sin a\sin c}},\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin p_c}{\sin a\sin b}}. \end{aligned}\right\}\quad(10)$$

B) 半角正切公式

爲了得到半角正切公式順次用 $\cos\frac{A}{2}$ 等除 $\sin\frac{A}{2}$ 等。

得:

$$\left.\begin{aligned} tg\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},\\ tg\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}},\\ tg\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}; \end{aligned}\right\}$$

採用(I)中約定的記號得:

$$\left.\begin{aligned} tg\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p_b\sin p_c}{\sin p\sin p_a}},\\ tg\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p_a\sin p_c}{\sin p\sin p_b}},\\ tg\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p_a\sin p_b}{\sin p\sin p_c}}. \end{aligned}\right\}\quad(11)$$

這些公式讀成這樣:每一角的半角的正切都是一個分數的平方根,此分數的分子是半周分別減去此角兩隣邊的差的正弦的乘積,分母是半周的正弦及半周減去此角對邊的差的正弦的乘積。

像前面指出的,根號前常取正號,因爲球面三角形的角的一半常小於 90°(因爲所研究的都是尤拉三角形)。用半角正弦公式解球面三角形,只有當此角不接近 180° 時,方才適宜;另一方面,如一角很銳,則餘弦公式是不適用的;實際上解球面三角形時對角的一切值應該用半角正切公式。

假設把公式：　$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_b \sin p_c}{\sin p \sin p_a}}$

根號下面的分子和分母同乘以 $\sin p_a$ 並取：

$$\sqrt{\frac{\sin p_a \sin p_b \sin p_c}{\sin p}}=m,$$

則得公式：

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{m}{\sin p_a}.\\&\text{同樣得}\\&\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{m}{\sin p_b}\\&\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{m}{\sin p_c}.\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

係數 m 的幾何解釋是已知三角形內切圓半徑的正切。從圖 52 得：

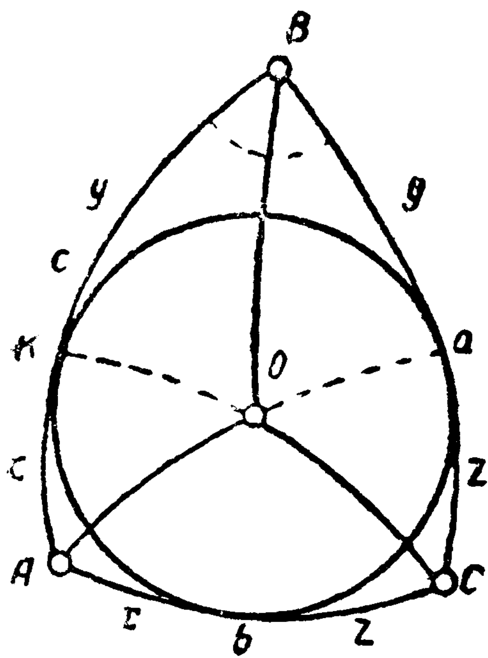


圖 52

$$y+z=a,$$
$$x+z=b,$$
$$x+y=c,$$

從此得　$2x+2y+2z=a+b+c,$

或　$x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c).$

所以　$x+y+z=p.$

從上式減去 $y+z=a$，得

$$x=p-a.$$

同樣得　$y=p-b,$

$$z=p-c.$$

從球面直角三角形有：

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\operatorname{tg} r}{\sin y}=\frac{\operatorname{tg} r}{\sin(p-b)},$$

但因爲　$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{m}{\sin(p-b)},$

所以 $$m=\operatorname{tg} r,$$

此處 r 是球面三角形內切圓半徑。

當球面三角形的邊和球半徑比起來很小的時候，可用邊的本身代替邊的正弦因而得到平面三角的公式:

球 面 三 角 形	平 面 三 角 形
1. $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}$	1. $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b\cdot c}}$
2. $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}$	2. $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{b\cdot c}}$
3. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}$	3. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

II. 半邊正弦、半邊餘弦及半邊正切的公式

按照公式(9, 10, 11)對極線三角形有:

$$\sin\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p'-b')\sin(p'-c')}{\sin b'\sin c'}},$$

$$\cos\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin p'\sin(p'-a')}{\sin b'\sin c'}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p'-b')\sin(p'-c')}{\sin p'\sin(p'-a')}}.$$

我們知道

$$\left.\begin{aligned} A'&=180^\circ-a\\ a'&=180^\circ-A\\ b'&=180^\circ-B\\ c'&=180^\circ-C \end{aligned}\right\} \qquad (1^*)$$

用 $2P$ 表角的和 $A+B+C$, 有:

$$a'+b'+c'=540^\circ-2P.$$

取 $$a'+b'+c'=p'$$

有: $$p'=270^\circ-P \qquad (2^*)$$

從(2*)式分別減去(1*)中各式,得:

$$p'-a'=90°-(P-A)$$
$$p'-b'=90°-(P-B)$$
$$p'-c'=90°-(P-C).$$

代入,得:

$$\sin\left(90°-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin[90°-(P-B)]\sin[90°-(P-C)]}{\sin(180°-B)\sin(180°-C)}},$$

$$\cos\left(90°-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin(270°-P)\sin[90°-(P-A)]}{\sin(180°-B)\sin(180°-C)}},$$

$$\operatorname{tg}\left(90°-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin[90°-(P-B)]\sin[90°-(P-C)]}{\sin(270°-P)\sin[90°-(P-A)]}}$$

或

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\sin C}},\\ \sin\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C}},\\ \operatorname{tg}\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}}.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

同樣對其餘兩邊有公式:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-B)}{\sin A\sin C}},\\ \sin\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)}{\sin A\sin B}},\\ \cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-C)}{\sin A\sin C}},\\ \cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)}{\sin A\sin B}},\\ \operatorname{tg}\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-B)}{\cos(P-A)\cos(P-C)}},\\ \operatorname{tg}\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)}{\cos(P-A)\cos(P-B)}}.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

因爲球面三角形三角的和常大於 180°，所以P常大於 90°，因而根號下的式子常爲正。

III. 用球面剩餘確定球面三角形的邊的公式

根據前面定義知道

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ,$$

因爲 $A+B+C=2P$，所以

$$P = 90^\circ + \frac{\varepsilon}{2}$$

或

$$P-A = 90^\circ + \frac{\varepsilon}{2} - A = 90^\circ - \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$P-B = 90^\circ + \frac{\varepsilon}{2} - B = 90^\circ - \left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$P-C = 90^\circ + \frac{\varepsilon}{2} - C = 90^\circ - \left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

把得出的式子代入半邊正弦，半邊餘弦，半邊正切各公式中卽得所求公式:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}},\\
\sin\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin C}},\\
\sin\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin B}},\\
\cos\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}},\\
\cos\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin C}},
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin B}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}.$$

IV. 用邊的函數表示球面剩餘的公式

按相隣三元素的公式有

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{c}{2}},$$

因爲

$$\varepsilon=A+B+C-180^\circ,$$

所以

$$\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}(C-\varepsilon);$$

代入，得

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(C-\varepsilon)}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{c}{2}};$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(C-\varepsilon)}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{c}{2}}.$$

利用合分比定理得:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(C-\varepsilon)-\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{1}{2}(C-\varepsilon)+\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a-b)+\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(C-\varepsilon)-\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{1}{2}(C-\varepsilon)+\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}c}.$$

利用和差化積公式得:

$$-\frac{2\sin\frac{1}{4}(C-\varepsilon+C)\sin\frac{1}{4}(C-\varepsilon-C)}{2\cos\frac{1}{4}(C-\varepsilon+C)\cos\frac{1}{4}(C-\varepsilon-C)}=$$

$$=\frac{-2\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(a-b-c)}{2\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(a-b-c)}$$

和

$$\frac{2\cos\frac{1}{4}(C-\varepsilon+C)\sin\frac{1}{4}(C-\varepsilon-C)}{2\sin\frac{1}{4}(C-\varepsilon+C)\cos\frac{1}{4}(C-\varepsilon-C)}=$$

$$=\frac{-2\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{2\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}.$$

化簡得:

$$-\operatorname{tg}\frac{1}{4}(2C-\varepsilon)\left(-\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon\right)=-\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b)\left[-\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)\right],$$

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{4}(2C-\varepsilon)\left(-\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon\right)=-\operatorname{tg}\frac{1}{2}p\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c),$$

或

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b),$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{ctg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}p\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c).$$

等號兩邊分別相乘並開平方得:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}p\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c)},$$

或利用(I)中約定的記號得:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}p\operatorname{tg}\frac{1}{2}p_a\operatorname{tg}\frac{1}{2}p_b\operatorname{tg}\frac{1}{2}p_c}\qquad(15)$$

因爲$\frac{\varepsilon}{4}$常小於90°,所以根號前取正號。

V. 用三邊一角的函數表示球面剩餘的公式

假設把兩個表爲球面剩餘的邊的正弦公式相乘並用表爲球面剩餘的第三邊的餘弦公式來除,則根據(14)得:

$$\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin^2 C\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

化簡得:

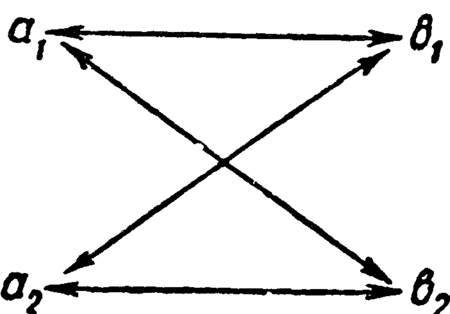
$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin C.\qquad(16)$$

VI. 球面三角形相隣三元素的公式

在這種情形下是用兩邊夾角或兩角夾邊來解球面三角形。

爲了得出所求公式利用(9)式和(10)式,有:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin p_b\sin p_c}{\sin b\cdot\sin c}\qquad\qquad \sin^2\frac{B}{2}=\frac{\sin p_a\cdot\sin p_c}{\sin a\cdot\sin c}$$



$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\sin p\sin p_a}{\sin b\cdot\sin c}\qquad\qquad \cos^2\frac{B}{2}=\frac{\sin p\sin p_b}{\sin a\cdot\sin c}$$

兩兩相乘 $a_1\times b_1$; $a_2\times b_2$; $a_1\times b_2$; $a_2\times b_1$, 得:

$$\text{I.}\ \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}=\frac{\sin p_b\sin p_c\sin p_a\sin p_c}{\sin b\sin c\sin a\sin c}=\sin^2\frac{C}{2}\frac{\sin^2 p_c}{\sin^2 c};$$

$$\text{II.}\quad \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}=\frac{\sin p\sin p_a\sin p\sin p_b}{\sin b\sin c\sin a\sin c}=\sin^2\frac{C}{2}\,\frac{\sin^2 p}{\sin^2 c};$$

$$\text{III.}\quad \sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}=\frac{\sin p_b\sin p_c\sin p\sin p_b}{\sin b\sin c\sin a\sin c}=\cos^2\frac{C}{2}\,\frac{\sin^2 p_b}{\sin^2 c};$$

$$\text{IV.}\quad \sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\sin p_a\sin p_c\sin p\sin p_a}{\sin a\sin c\sin c\sin b}=\cos^2\frac{C}{2}\,\frac{\sin^2 p_a}{\sin c}.$$

開平方並將所得結果分別加減：I+II, II−I, III+IV, III−IV,

得：

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{C}{2}\,\frac{\sin p+\sin p_c}{\sin c},$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{C}{2}\,\frac{\sin p-\sin p_c}{\sin c},$$

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{C}{2}\,\frac{\sin p_b+\sin p_a}{\sin c},$$

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{C}{2}\,\frac{\sin p_b-\sin p_a}{\sin c}.$$

從此得

$$\cos\frac{A-B}{2}=\sin\frac{C}{2}\,\frac{2\sin\frac{1}{2}(p+p_c)\cos\frac{1}{2}(p-p_c)}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}\,\frac{2\sin\frac{1}{2}(p-p_c)\cos\frac{1}{2}(p+p_c)}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}\,\frac{2\sin\frac{1}{2}(p_b+p_a)\cos\frac{1}{2}(p_b-p_a)}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\sin\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}\,\frac{2\sin\frac{1}{2}(p_b-p_a)\cos\frac{1}{2}(p_b-p_a)}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}};$$

或

$$\cos\frac{A-B}{2}=\sin\frac{C}{2}\,\frac{\sin\left(p-\frac{c}{2}\right)\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}\,\frac{\cos\left(p-\frac{c}{2}\right)\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}\,\frac{\sin\left(p-\frac{a+b}{2}\right)\cos\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\sin\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}\,\frac{\cos\left(p-\frac{a+b}{2}\right)\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

因爲
$$p=\frac{a+b+c}{2},$$

所以
$$\frac{c}{2}=p-\frac{a+b}{2},$$

或
$$p-\frac{c}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

代入並化簡得:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I. } \sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2}\\
&\text{II. } \sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2}\\
&\text{III. } \cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}\\
&\text{IV. } \cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}
\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

對這些公式能够採取以下記憶規則:

а) 左邊部分是角的半和或半差,右邊部分是這些角對邊的半和或半差。

б) 假設左邊部分是正弦,則右邊部分是半差; 假設左邊部分是餘弦,則右邊部分是半和:

в) 假設左邊部分是半和,則右邊部分是餘弦; 假設左邊部分是半差,則右邊部分是正弦。

г) 右邊部分的分母常是第三半邊的和分子同名的三角函數。

д) 此外,右邊部分還有一個因子,它是第三半角的函數,並且是左邊部分的餘函數。

VII. 相似

假設在公式(17)中用 III 除 I, 用 IV 除 II, 用 I 除 II, 用 III 除IV, 則得:

$$\frac{\cos\frac{c}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{c}{2}\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{c}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{a+b}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{c}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{c}{2}\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{\cos\frac{C}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{c}{2}\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2}}.$$

化簡即得到所謂相似[1]：

$$
\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}&=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},\\
\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}&=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},\\
\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}&=\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)},\\
\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}&=\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}.
\end{aligned}\right\} \tag{18}
$$

當已知三元素相隣的時候，用公式(18)來解球面三角形是很方便的。

用一個相似除另一個，得

$$
\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}. \tag{19}
$$

當 a, b 和球半徑 R 比起來很小的時候，在等式(19)右邊比 $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}$ 可用邊本身和差的比來代替，所以：

$$
\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{a+b}{a-b},
$$

[1] 相似是根據希臘文 αγα) ονια 一字來的，就是比例的意思。公式(18)所以叫做相似是因為它可以寫成兩個比的等式，例如第一個相似可以寫成：

$$
\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}:\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\cos\frac{a-b}{2}:\cos\frac{a+b}{2}.
$$

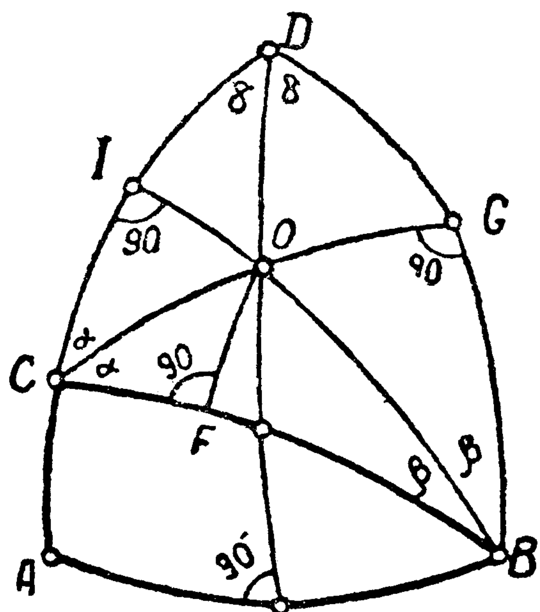


圖 53

即公式(19)當 a 和 b 很小的時候變成平面三角中熟知的公式。

顯然，相似也能用純粹幾何方法導出；下面提供一個這樣的方法。

在球面三角形 ABC 中在頂點 B 作角 ABD 等於 A, 延長 AC 邊與弧 BD 相交得等腰三角形 ABD 的頂點 D。作 B, C, D 各角的內分角線，這些分角線交於一點 O，就是三角 BCD 內切圓的圓心，這個圓的半徑是 $OF=r$。

因爲有一角相等並有公共邊，所以:

$$\Delta FOB=\Delta BOG,$$

$$\Delta GOD=\Delta DOI,$$

$$\Delta IOC=\Delta COF,$$

這裏有:
$$AC+CI=BG=BC-CF$$

或
$$CI+CF=BC-AC;$$

但因爲
$$CF=CI,$$

所以
$$CF=\frac{BC-AC}{2},$$

又因爲
$$BC=a,\ AC=b,$$

所以
$$CF=\frac{a-b}{2}.$$

因而，得:
$$BF=a-CF=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

解有公共直角邊的球面直角三角形 COF 和 OFB, 得

$$\sin CF=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}OF,$$

$$\sin FB=\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}OF.$$

用第二式除第一式，得:

$$\frac{\sin CF}{\sin FB}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}. \tag{A}$$

但是因爲　$CF=\frac{a-b}{2}$, $FB=\frac{a+b}{2}$, $\beta=\frac{A-B}{2}$,

並且　$$2\alpha=180^\circ-C$$

或　$$\alpha=90^\circ-\frac{C}{2},$$

所代入後(A)式化爲:　$$\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A-B}{2}}$$

或　$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}, \tag{18'}$$

因爲公式(18′)就是第二個相似,所以也就是所要證明的;同樣的方法可以求出其餘兩個相似。

§ 12　球面三角形的分析和解法

像以前指出的,球面三角的問題是根據足够的條件,即:

1) 已知邊 a, b, c, 求角 A, B 和 C;

2) 已知角 A, B, C, 求邊 a, b, c;

3) 已知邊 a, b 和角 C, 求邊 c 和角 A, B;

4) 已知邊 c 和角 A, B, 求邊 a, b 和角 C;

5) 已知邊 a, b 和角 A, 求邊 c 和角 B, C;

6) 已知角 A, B 和邊 a, 求邊 b, c 和角 C。

所有這六個基本問題都能用前節導出的某些公式來解，不過那些公式用起來便利的程度不同所得結果準確的程度也不同，所以在解球面三角形時應該遵守以下規則。

規則 1　盡量利用未知元素的正切或餘切來確定該元素，因爲對於角的一切値正切和餘切變化都够快，與其他三角函數，例如與接近 90° 角的正弦或接近 0° 或 180° 角的餘弦比較起來，能够給出更滿意的結果。

規則 2　用正弦確定未知元素時有兩個值得出來，和在平面三角中一樣，決定取其中那一個（大於 90° 的或小於 90° 的）作爲問題的解很不容易；所以勸告大家確定未知量時盡量避免利用正弦，但問題 5 和問題 6 中不可避免的要利用正弦。

規則 3　由於就是引用補助角也不能充分利用對數表，所以非對數形公式用起來很不便利。

規則 4　在實際利用某些公式解問題時，爲了計算合理化，必須重視計算工作所需的時間，這種時間能用表值數（由眞數查對數及由對數查眞數總共的次數）和表頁數（這些表值在表上所佔的頁數）也就是需要揭開表的次數表示出來。

問題 1　已知球面三角形的邊 a, b, c，求角 A, B, C。

可以利用（阿耳-巴丹）角公式來解，例如，對於角 A：

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$

或

$$\cos A=\cos a\,\mathrm{cosec}\,b\,\mathrm{cosec}\,c-\mathrm{ctg}\,b\,\mathrm{ctg}\,c,$$

但用這些公式解起來有困難，因爲表值數等於 18，而表頁數等於 15。

這個問題也能用半角正弦公式來解，例如，對於角 A 有：

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_b\sin p_c}{\sin b\sin c}}.$$

例　已知邊：$a=34°12'48''$，$b=42°55'12''$，$c=51°02'39''$；求角 A，B 和 C。

a	34°12′48″	$\lg\sin p_b$	9.55765	$\lg\sin p_c$	9.35355
b	42°55′12″	$\lg\sin p_c$	9.35355	$\lg\sin p_a$	9.69733
c	51°02′39″	$\partial\lg\sin b$	0.16687	$\partial\lg\sin c$	0.10922
$2p$	128°10′39″	$\partial\lg\sin c$	0.10922	$\partial\lg\sin a$	0.25005
p	64°05′19″.5	$\lg\sin^2\frac{A}{2}$	9.18729	$\lg\sin^2\frac{B}{2}$	9.41015
$p-a$	29°52′31″.5				
$p-b$	21°10′07″.5	$\lg\sin\frac{A}{2}$	9.59365	$\lg\sin\frac{B}{2}$	9.70508
		$\frac{A}{2}$	23°05′58″	$\frac{B}{2}$	30°23′11″
$p-c$	13°02′40″.5	A	46.11′56″	B	60°56′22″

		用正弦公式驗算	
$\lg\sin p_b$	9.55765		
$\lg\sin p_a$	9.69733		
$\partial\lg\sin b$	0.16687	$\lg\sin b$	9.83313
$\partial\lg\sin a$	0.25005	$\lg\sin A$	9.85838
		$\partial\lg\sin B$	0.05844
$\lg\sin^2\frac{C}{2}$	9.67190		
$\lg\sin\frac{C}{2}$	9.83595		
		$\lg\sin a$	9.74995
$\frac{C}{2}$	43°16′04″	a	34°12′48″
C	86°32′08″		

問題 2　已知球面三角形的三角 A, B, C；求三邊 a, b, c。

能用以下方法來解：

a）按照邊的餘弦公式，對邊 a 有：

$$\cos a=\cos A\operatorname{cosec}B\operatorname{cosec}C+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C,$$

同樣可以求得 $\cos b$ 和 $\cos c$。根據規則 3，知道用這些公式來解是不便利的，因爲表值數爲 18 而表頁數爲 15；

б）按照半邊正切公式，對邊 a 有：

$$\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}=\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)};$$

同樣可以確定 $\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}$ 和 $\operatorname{tg}^2\frac{c}{2}$。

顯然，後面的公式對計算來說更爲便利，因爲表值數等於 7 而表頁數也等於 7。

例　已知三角：$A=62°05'40''$, $B=54°36'10''$, $C=70°14'30''$；求三邊 a, b, c。

A	62°05′40″	$\lg\cos P$	8.78187
B	54°36′10″	$\lg\cos(P-A)$	9.93134
C	70°14′30″	$\partial\lg\cos(P-B)$	0.10868
$2P$	186°56′20″	$\partial\lg\cos(P-C)$	7.03671
P	93°28′10″	$\lg\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}$	8.85860
$P-A$	31°22′30″	$\lg\operatorname{tg}\frac{a}{2}$	9.42930
$P-B$	38°52′00″	$\frac{a}{2}$	15°02′28″
$P-C$	23°13′40″	a	30°04′56″

				用正弦公式驗算	
$\lg\cos P$	8.78187	$\lg\cos P$	8.78187		
$\lg\cos(P-B)$	9.89132	$\lg\cos(P-C)$	9.96329		
$\partial\lg\cos(P-C)$	0.03671	$\partial\lg\cos(P-A)$	0.06866		
$\partial\lg\cos(P-A)$	0.06866	$\partial\lg\cos(P-B)$	0.10868	$\lg\sin a$	9.70005
$\lg\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}$	8.77856	$\lg\operatorname{tg}^2\frac{c}{2}$	8.92250	$\lg\sin B$	9.91124
$\lg\operatorname{tg}\frac{b}{2}$	9.38928	$\lg\operatorname{tg}\frac{c}{2}$	9.46125	$\partial\lg\sin b$	0.33502
$\frac{b}{2}$	13°46′11″	$\frac{c}{2}$	16°07′54″	$\lg\sin A$	9.94631
b	27°32′22″	c	32°15′48″	A	64°05′40″

問題 3　已知兩邊 a 和 b 及其夾角 C。求邊 c 及角 A 和角 B。能用下面的方法來解:

a) 按照邊的餘弦公式:

$$\cos c=\cos a\ \cos b+\sin a\sin b\cos C,$$

然後按正弦公式求角 A 和角 B:

$$\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin a}{\sin c};\ \frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin b}{\sin c}.$$

從規則 1, 2, 3, 4 出發，知道這個解法是不便利的，因爲表值數等於 12 而表頁數等於 9。

б）和前面一樣，用邊的餘弦公式求邊 c，即

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C,$$

但確定角 A 和角 B 時用公式：

$$\operatorname{ctg} A=\operatorname{ctg} a\sin b\operatorname{cosec} C-\cos b\operatorname{ctg} C,$$

$$\operatorname{ctg} B=\operatorname{ctg} b\sin a\operatorname{cosec} C-\cos a\operatorname{ctg} C,$$

然而根據規則 3，知道這個解法也不便利，因爲表值數等於 12 而表頁數等於 8。

в）用相似求角 A，角 B 和邊 c，有：

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(a-b)\sec\frac{1}{2}(a+b),$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\sin\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(a+b),$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(A+B)\sec\frac{1}{2}(A-B).$$

最後這些公式是最便利的，因爲表值數等於 9 而表頁數等於 6。

例　已知：$a=104°23'15''$；$b=67°04'28''$；$C=36°17'49''$；求 c, A 和 B。

$\frac{C}{2}$	$18°08'54''.5$	$\lg\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$	0.48441	$\lg\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$	0.48441
$\frac{a-b}{2}$	$18°39'22''.5$	$\lg\cos\frac{a-b}{2}$	9.97655	$\lg\sin\frac{a-b}{2}$	9.50500
$\frac{a+b}{2}$	$85°43'51''.5$	$\partial\lg\cos\frac{a+b}{2}$	1.12820	$\partial\lg\sin\frac{a+b}{2}$	0.00121
		$\lg\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$	1.58916	$\lg\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}$	9.9[illegible]062
		$\frac{A+B}{2}$	$88°31'29''$	$\frac{A-B}{2}$	$44°22'53''$
		A	$132°54'22''$	B	$44°08'36''$

		用正弦公式驗算	
$\lg \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$	1.12690		
$\lg \cos\frac{A+B}{2}$	8.41070	$\lg \sin a$	9.98616
$\partial \lg \cos\frac{A-B}{2}$	0.14588	$\lg \sin B$	9.84289
$\lg \operatorname{tg}\frac{c}{2}$	9.68357	$\partial \lg \sin A$	0.13521
$\frac{C}{2}$	25°45′40″	$\lg \sin b$	9.96426
C	51°31′20″	b	67°04′23″

問題 4 已知一邊 c 及其兩隣角 A 和 B；求邊 a, b 和角 C。

解用以下方法來解：

a）按照角的餘弦公式求角 C：

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$

然後按照正弦公式求邊 a 和 b：

$$\frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin C}; \quad \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin C};$$

不過根據規則 1, 2, 3, 4, 知道用這些公式來解是不便利的，因爲表値數等於 12 而表頁數等於 9。

б）和前面一樣，用角的餘弦公式求角 C, 但以後求邊 a 和邊 b 時用餘切：

$$\operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} A \sin B \operatorname{cosec} c + \operatorname{ctg} c \cos B,$$

$$\operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} B \sin A \operatorname{cosec} c + \operatorname{ctg} c \cos A;$$

然而根據規則 3，知道用這些公式來解也不便利，因爲表値數等於 12 表頁數等於 8。

в）用相似求邊 a 邊 b 和角 C；有：

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\cos\frac{1}{2}(A-B)\sec\frac{1}{2}(A+B),$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\sin\frac{1}{2}(A-B)\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(A+B),$$

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(a+b)\sec\frac{1}{2}(a-b).$$

最後這些公式是最便利的，因爲表值數等於 9 表頁數等於 6。

例　已知：$c=68°50'$

$A=114°35'$

$B=30°19'$；

求 C, a, b。

$\frac{C}{2}$	34°25′	$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}$	9.83578	$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}$	9.83578
$\frac{A-B}{2}$	42°08′	$\lg\cos\frac{A-B}{2}$	9.87016	$\lg\sin\frac{A-B}{2}$	9.82663
$\frac{A+B}{2}$	72°27′	$\partial\lg\cos\frac{A+B}{2}$	0.52066	$\partial\lg\sin\frac{A+B}{2}$	0.02070
		$\lg\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$	0.22660	$\lg\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$	9.68311
		$\frac{a+b}{2}$	59°19′	$\frac{a-b}{2}$	25°44′
		a	85°03′	b	33°34′

$\frac{A+B}{2}$	72°27′	$\lg\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$	0.49996	用正弦公式驗算	
$\frac{a+b}{2}$	59°19′	$\lg\cos\frac{a+b}{2}$	9.70788	$\lg\sin a$	9.99838
$\frac{a-b}{2}$	25°44′	$\partial\lg\cos\frac{a-b}{2}$	0.04538	$\lg\sin B$	9.70310
		$\lg\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$	0.25322	$\partial\lg\sin b$	0.25735
		$\frac{C}{2}$	29°10′	$\lg\sin A$	9.95883
		C	58°20′	A	65°26′ | 114°34′

問題 5　已知兩邊 a 和 b 及其一的對角 A；求角 B 和 C 及邊 c。

根據正弦公式，確定角 B：

$$\sin B=\frac{\sin b}{\sin a}\sin A.$$

像以前指出的，有兩個解。

根據前面，有：

第一種情形：角 $A<90^\circ$。

a）$a>b$；問題有一個解，角 $B<90^\circ$。

б）$a<b,\ a+b=180^\circ$；問題有一個解，角 $B>90^\circ$。

в）$a<b,\ a+b>180^\circ$；問題有一個解，角 $B>90^\circ$。

г）$a<b,\ a+b<180^\circ$；問題有兩個解，$B_1=B$ 和 $B_2=180^\circ-B$。

д）$a<b,\ a=h_c$；此處 h_c 是從頂點 C 向 AB 邊所作的垂線；顯然，在這種情形下兩個解合併為一個並得到球面直角三角形 ACD。

第二種情形：$A>90^\circ$。

a）$a<b$；問題有一個解，角 $B>90^\circ$。

б）$a>b,\ a+b=180^\circ$；問題有一個解，角 $B<90^\circ$。

в）$a>b,\ a+b<180^\circ$；問題有一個解，角 $B<90^\circ$。

г）$a>b,\ a+b>180^\circ$；問題有兩個解，$B_1=B,\ B_2=180^\circ-B$。

д）$a>b,\ a=h_c$；兩解合併為一。

第三種情形：$A=90^\circ$。

a）$a=b=90^\circ$；問題的解不確定，因為在這種情形下頂點 C 是 AB 邊的極，所以角 C 可以有從 0° 到 360° 間的一切值。

б）$a>b,\ a+b<180^\circ$；問題有兩個解，並且是以 b 為公共直角邊的兩個球面直角三角形。

в）$a>b,\ a+b\geqslant 180^\circ$；無解。

г）$a<b,\ a+b>180^\circ$；有兩個解。

д）$a<b,\ a+b\leqslant 180^\circ$；無解。

當角 B 確定以後求 C 角和 c 邊時用相似：

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

顯然，$\frac{C}{2}$和$\frac{c}{2}$應當是經常小於 90°。

例　已知兩邊和一角：$a=89°45'$, $b=100°15'$, $A=125°30'$；求角 B, 角 C 和邊 c。因爲 $A>90°$, $a<b$；所以有一個解，並且應取角 B 大於 90°。

對解題有用的公式是：

$$\sin B=\frac{\sin b}{\sin a}\sin A,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(a+b)\sec\frac{1}{2}(b-a),$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(A+B)\sec\frac{1}{2}(B-A).$$

b	100°15′	lg sin b	9.99301	$\frac{A+B}{2}$	126°08′	lg tg $\frac{A+B}{2}$	0.13666n
a	89°45′	∂ lg sin a	0.00000	$\frac{a+b}{2}$	95°00′	lg cos $\frac{a+b}{2}$	8.94030n
A	125°30′	lg sin A	9.91069	$\frac{b-a}{2}$	5°15′	∂ lg cos $\frac{b-a}{2}$	0.00183
		lg sin B	9.90370			lg ctg $\frac{C}{2}$	9.07878
		B	126°46′			$\frac{C}{2}$	83°10′
						C	166°20′

				用正弦公式驗算	
$\frac{a+b}{2}$	95°00′	lg tg $\frac{a+b}{2}$	1.05805		
$\frac{A+B}{2}$	126°08′	lg cos $\frac{A+B}{2}$	9.77058n	lg sin c	9.46292
$\frac{B-A}{2}$	0°38′	∂ lg cos $\frac{B-A}{2}$	0.00003	lg sin B	9.90370
		lg tg $\frac{c}{2}$	0.82866	∂ lg sin C	0.62641
		$\frac{c}{2}$	81°33′.7	lg sin b	9.99303
		c	163°07′.0	b	79°46′

例 已知: $a=63°22'30''$

$b=81°14'20''$

$A=54°39'10''$;

求 B, C 和 c。

角 $A<90°, a<b, a+b<180°$; 根據第一種情形中的 r), 問題有兩個解: $B_1=B, B_2=180°-B$; 其他方面完全和前面的例一樣。

把 $B_2=115°36'30''$ 取作 B 值, 得 $C_2=30°57'24''$。

當取 $B_2=115°36'30''$ 時, 得 $c_2=34°19'00''$。

b	$81°14'20''$	$\lg\sin b$	9.99491	$\frac{A+B}{2}$	$59°31'20''$	$\lg\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}$	9.76976
a	$63°22'30''$	$\partial\lg\sin a$	6.04868	$\frac{a-b}{2}$	$-8°55'55''$	$\lg\cos\frac{a-b}{2}$	9.9 471
A	$54°39'10''$	$\lg\sin A$	9.91151	$\frac{a+b}{2}$	$72°18'25''$	$\partial\lg\cos\frac{a+b}{2}$	0.51724
		$\lg\sin B$	9.95510			$\lg\operatorname{tg}\frac{C_1}{2}$	0.28171
		B_1	$64°23'30''$			$\frac{C_1}{2}$	$62°24'07''$
		$B_2=180°-B_1$	$115°36'30''$			C_1	$124°48'14''$

				用正弦公式驗算	
$\frac{a+b}{2}$	$72°18'25''$	$\lg\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$	0.49620		
$\frac{A+B_1}{2}$	$59°31'20''$	$\lg\cos\frac{A+B_1}{2}$	9.70518	$\lg\sin c_1$	9.95421
$\frac{A-B_1}{2}$	$-4°52'10''$	$\partial\lg\cos\frac{A-B_1}{2}$	0.00157	$\lg\sin B_1$	9.95510
		$\lg\operatorname{tg}\frac{c_1}{2}$	0.20295	$\partial\lg\sin C_1$	0.08560
		$\frac{c_1}{2}$	$57°55'31''$	$\lg\sin b$	9.99491
		c_1	$115°51'02''$	b	$81°14'40''$

問題 6 已知角 A, 角 B 及角 A 的對邊 a; 求角 C 及邊 b 和邊 c。

根據正弦公式, 有:

$$\sin b=\frac{\sin a\sin B}{\sin A};$$

此題當 $\sin a\sin B<\sin A$ 時，無解，並且有時能有兩個解。

考察已知三角形的極線三角形 $A_1B_1C_1$，有：

$$a_1=180^\circ-A,$$

$$b_1=180^\circ-B,$$

$$A_1=180^\circ-a.$$

根據前面問題的分析有：

第一種情形：$A_1<90^\circ$。

r）$a_1<b_1$ 且 $a_1+b_1<180^\circ$。

第二種情形：$A_1>90^\circ$。

r）$a_1>b_1$ 且 $a_1+b_1>180^\circ$。

問題有兩個解，在我們現在的情形下經過代換得：

第一種情形：　$180^\circ-a<90^\circ$ 或 $a>90^\circ$。

r）$180^\circ-A<180^\circ-B$ 或 $A>B$

$(180^\circ-A)+(180^\circ-B)<180^\circ$ 或 $A+B>180^\circ$

第二種情形：$180^\circ-a>90^\circ$ 或 $a<90^\circ$。

r）$180^\circ-A>180^\circ-B$ 或 $A<B$

$(180^\circ-A)+(180^\circ-B)>180^\circ$ 或 $A+B<180^\circ$。

由於解的雙重性，角 C 和邊 c 都有兩個值 C_1, C_2 和 c_1, c_2；要確定這些值，像前面一樣，我們利用相似。

例　已知：$A=51^\circ48'45''$, $B=68^\circ12'58''$, $a=41^\circ54'17''$；求邊 b，邊 c 和角 C。

因為 $a<90^\circ$；$A<B$ 且 $A+B<180^\circ$；所以問題有兩個解：

得出邊 b：

$$\sin b=\frac{\sin a}{\sin A}\sin B,$$

然後用相似求角 C 和邊 c：

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}\cos\frac{1}{2}(a-b)\sec\frac{1}{2}(a+b),$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-a)\sin\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(B-A).$$

a	41°54′17″	lg sin a	9.82471
A	51°48′45″	∂ lg sin A	0.10458
B	68°12′58″	lg sin B	9.96782
		lg sin b	9.89711
		b_1	52°05′50″
		b_2	127°54′10″ [1]

[1] 解的繼續見下頁77。

§ 13 初等球面三角形

三邊比起球半徑很很小的三角形或一邊及其對角很小的三角形叫做球面初等三角形。

對於三邊比起球半徑都很小的球面三角形，存在以下的定理，這個定理叫做列然德耳定理。

假設作平面三角形，使它的三邊分別等於拉直了的球面三角形的三邊，則在極小的差誤限度內它的三角分別等於球面三角形內的相當角減去球面剩餘的三分之一；即三邊灣曲很小的球面三角形能夠當作平面三角形來解，只要先把它的每個角減去球面剩餘的三分之一。

設有球面三角形 ABC，它的三邊的長度 a,b,c 是用弧度表示的，用這些邊作平面三角形 ABC，在其中我們來考察平面角 A_1, B_1, C_1，和球面三角形的角相差多少。

從球面三角形 ABC 中求得:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_b\sin p_c}{\sin b\sin c}};\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_a\sin p}{\sin b\sin c}},$$

								用正弦公式驗算	
$\frac{A+B}{2}$	$60°00'51''.5$	$\lg \operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}$	9.76119	$\frac{b_1-a}{2}$	$5°05'46''.5$	$\lg \operatorname{tg}\frac{b_1-a}{2}$	8.95028		
$\frac{a-b_1}{2}$	$-5°05'46''.5$	$\lg \cos\frac{a-b_1}{2}$	9.99828	$\frac{A+B}{2}$	$60°00'51''.5$	$\lg \sin\frac{A+B}{2}$	9.93759	$\lg \sin c$	9.92294
$\frac{a+b_1}{2}$	$47°00'03''.5$	$\partial \lg \cos\frac{a+b}{2}$	0.16623	$\frac{B-A}{2}$	$8°12'06''.5$	$\partial \lg \sin\frac{B-A}{2}$	0.84570	$\lg \sin B$	9.96782
		$\operatorname{tg} \lg\frac{C_1}{2}$	9.92570			$\lg \operatorname{tg}\frac{c}{2}$	9.73357	$\partial \lg \sin C$	0.00633
		$\frac{C_1}{2}$	$40°07'20''$			$\frac{c_1}{2}$	$28°26'02''$	$\lg \sin b$	9.89709
		C_1	$80°14'40''$			c_1	$56°52'04''$	b_1	$52°05'40''$

在平面三角形 $A_1B_1C_1$ 中有:

$$\sin\frac{A_1}{2}=\sqrt{\frac{p_b p_c}{b c}};\quad \cos\frac{A_1}{2}=\sqrt{\frac{p\,p_a}{b c}}.$$

把求得的值代入公式:

$$\sin\frac{A-A_1}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A_1}{2}-\sin\frac{A_1}{2}\cos\frac{A}{2}$$

並把三角形的面積表爲

$$S=\sqrt{p\,p_a p_b p_c},$$

得: $$\sin\frac{A-A_1}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_b \sin p_c\, p\, p_a}{\sin b \sin c\cdot b\cdot c}}-\sqrt{\frac{p_b\, p_c \sin p \sin p_a}{b\cdot c\cdot \sin b \sin c}},$$

提出 $$\sqrt{\frac{1}{\sin b \sin c\cdot b\cdot c}}$$

得: $$\sin\frac{A-A_1}{2}=\sqrt{\frac{1}{\sin b \sin c\cdot b\cdot c}}\times$$

$$\times\left(\sqrt{\sin p_b \sin p_c\, p\, p_a}-\sqrt{\sin p \sin p_a\, p_b\, p_c}\right);$$

用 S 乘分子和分母,得:

$$\sin\frac{A-A_1}{2}=\frac{S}{bc}\sqrt{\frac{1}{\frac{\sin b}{b}\cdot\frac{\sin c}{c}}}\times$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{\sin p_b \sin p_c}{p_b\, p_c}}-\sqrt{\frac{\sin p \sin p_a}{p\, p_a}}\right).$$

在展開式中取 4 次以下的項,得:

$$\sin\frac{A-A_1}{2}=\frac{S}{bc}\,\frac{1}{\left(1-\frac{b^2}{12}\right)\left(1-\frac{c^2}{12}\right)}\times$$

$$\times\left[\left(1-\frac{p_b^2}{12}+\frac{p_b^4}{1440}\right)\left(1-\frac{p_c^2}{12}+\frac{p_c^4}{1440}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{p^2}{12}+\frac{p^4}{1440}\right)\left(1-\frac{p_a^2}{12}+\frac{p_a^4}{1440}\right)\right].$$

脫括號，得：

$$\sin\frac{A-A_1}{2}=\frac{S}{bc}\left(1+\frac{b^2+c^2}{12}\right)\left[\frac{p^2+p_a^2-p_b^2-p_c^2}{12}+\right.$$

$$\left.+\frac{p_b^2\,p_c^2-p^2\,p_a^2}{144}-\frac{p^4+p_a^4-p_b^4-p_c^4}{1440}\right].$$

先展開然後因子分解，得：

$$p^2+p_a^2-p_b^2-p_c^2=p^2+p^2-2pa+a^2-p^2+$$

$$+2pb-b^2-p^2+2pc-c^2=b\,(2p-b)+$$

$$+(c-a)\,(2p-a-c)\;=\;b\,(2p-b)+$$

$$+(c-a)b=b(a+b+c-b+c-a)=2bc.$$

同樣方法得：

$$p_b^2\,p_c^2-p^2\,p_a^2=\frac{bc}{2}(a^2-b^2-c^2)$$

及

$$p^4+p_a^4-p_b^4-p_c^4=bc\,(3a^2+b^2-c^2).$$

代入得：

$$\sin\frac{A-A_1}{2}=\frac{S}{bc}\left(1+\frac{b^2+c^2}{12}\right)\left[\frac{2bc}{12}+\frac{bc\,(a^2-b^2-c^2)}{2\cdot 144}-\right.$$

$$\left.-\frac{bc(3a^2+b^2+c^2)}{1440}\right]=S\left(1+\frac{b^2+c^2}{12}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{6}+\frac{a^2-b^2-c^2}{288}-\frac{3a^2+b^2+c^2}{1440}\right)=$$

$$=S\left(\frac{1}{6}+\frac{b^2+c^2}{12\cdot 6}+\frac{a^2-b^2-c^2}{288}-\frac{3a^2+b^2+c^2}{1440}\right)=$$

$$=\frac{S}{6}\left[1+\frac{b^2+c^2}{12}+\frac{a^2-b^2-c^2}{48}-\frac{3a^2+b^2+c^2}{240}\right],$$

或最後：

$$\sin\frac{A-A_1}{2}=\frac{S}{6}\left[1+\frac{20b^2+20c^2+5a^2-5b^2-5c^2-3a^2-b^2-c^2}{240}\right]=$$

$$=\frac{S}{6}\left(1+\frac{a^2+7b^2+7c^2}{120}\right).$$

表 a, b, c 爲長度單位，並設球半徑爲 R，得：

$$\frac{A-A_1}{2}=\frac{S}{6R^2\sin 1''}\left(1+\frac{a+7b^2+7c^2}{120\,R^2}\right),$$

或 $$A-A_1=\frac{S}{3R^2\sin 1''}\left(1+\frac{a^2+7b^2+7c^2}{120\,R^2}\right);$$

同樣得: $$B-B_1=\frac{S}{2R^2\sin 1''}\left(1+\frac{7a^2+b^2+7c^2}{120\,R^2}\right),$$

$$C-C_1=\frac{S}{3R^2\sin 1''}\left(1+\frac{7a^2+7b^2-c}{120\,R^2}\right);$$

相加得:

$$\varepsilon''=\frac{S}{3R^2\sin 1''}\left(3+\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}\right)=\frac{S}{R^2\sin 1''}\left(1+\frac{a^2+b^2+c^2}{24R^2}\right),$$

此處 ε'' 爲球面剩餘。

由此在同一精確度下得到:

$$\frac{S}{3R^2\sin 1''}=\frac{\varepsilon''}{3}\left(1-\frac{a^2+b^2+c^2}{24\,R^2}\right);$$

引入 $$m^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{3},$$

得: $$A-A_1=\frac{\varepsilon''}{3}\left(1-\frac{a^2+b^2+c^2}{24R^2}\right)\left(1+\frac{a^2+7b^2+7c^2}{120R^2}\right),$$

或 $$A-A_1=\frac{\varepsilon''}{3}\left(1-\frac{a^2+b^2+c^2}{24R^2}+\frac{a^2+7b^2+7c^2}{120R^2}\right)=$$

$$=\frac{\varepsilon'}{3}\left(1+\frac{b^2+c^2-2a^2}{60R^2}\right)=\frac{\varepsilon''}{3}+\frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-a^2);$$

同樣

$$B-B_1=\frac{\varepsilon''}{3}+\frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-b^2);\quad C-C_1=\frac{\varepsilon''}{3}+\frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-c^2),$$

或

$$A_1=A-\frac{\varepsilon''}{3}-\frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-a^2),$$

$$B_1=B-\frac{\varepsilon''}{3}-\frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-b^2),$$

$$C_1=C-\frac{\varepsilon''}{3}-\frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-c^2).$$

考察修正項

$$\frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-a^2);\quad \frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-b^2);\quad \frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-c^2),$$

我們看到，它們和三角形的形狀有關，對於等邊三角形它們等於零並且隨着邊的差異的增大而增大。

我們來求修正項的最大值。

引入

$$Q=\frac{\varepsilon''}{60R^2}(m^2-a^2),$$

並使用代換

$$\varepsilon''=\frac{S}{R^2}$$

得:

$$Q=\frac{S}{60R^4}(m^2-a^2).$$

用三角形的邊表示三角形的面積:

$$S=\sqrt{pp_ap_bp_c}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{a^2(b+c)^2-a^4-(b+c)^2(b-c)^2+a^2(b-c)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{a^2[(b+c)^2-a^2+(b-c)^2]-(b^2-c^4)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{a^2(b^2+c^2+2bc-a^2+b^2+c^2-2bc)-(b^2-c^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{a^2(2b^2+2c^2-a^2)-(b^2-c^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{3a^2(2m^2-a^2)-(b^2-c^2)},$$

當 $b=c$，即當三角形爲等腰的時候，得到的式子將有最大值，並且

$$Q=\frac{a(m^2-a^2)\sqrt{3(2m^2-a^2)}}{240R^4}.$$

當 $R=6371$ 千米，並且 $a=110$ 千米，$b=232$ 千米因而 $m=200$ 千米時棄去修正項所造成的角的誤差小於 $0''.001$，卽甚至在最精確的計算中也能使用以下公式

$$\left.\begin{aligned}A_1&=A-\frac{\varepsilon''}{3}\\B_1&=B-\frac{\varepsilon''}{3}\\C_1&=C-\frac{\varepsilon''}{3}\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

此處 $$\varepsilon''=\frac{S}{R^2\sin 1''}=\frac{bc\sin A}{2R^2\sin 1''}=(f)\,bc\sin A,\qquad (21)$$

此處 $(f)=\dfrac{1}{2R^2\sin 1''}$ 取自專門測量表。

一般說來，對於地面上的球面三角形，即使在邊很大的時候球面剩餘也是很小的；對於地面上的等邊三角形 ε 如下：

$a=\ 30$ 千米 $\quad \varepsilon\approx 2''$

$a=\ 60$ 千米 $\quad \varepsilon\approx 8''$

$a=117$ 千米 $\quad \varepsilon\approx 27''$

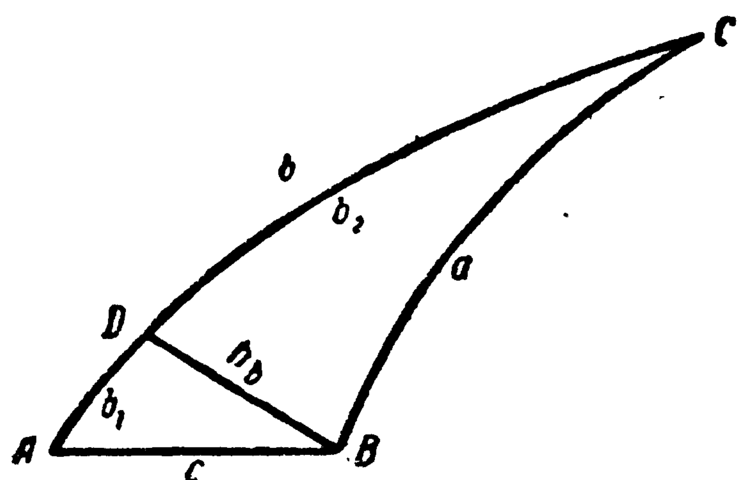


圖 54

現在我們來研究第二種初等球面三角形 ABC（圖 54），其中角 C 及其對邊 $AB=c$ 是很小量。自頂點 B 向對邊 AC 引球面垂線 h_b，分已知球面三角形爲二直角三角形。因爲三角形 ABD 的三邊都很小，所以取球面剩餘等於零可以當作平面三角形來解；在很小差誤限度內有：

$$AD=b_1=c\cdot\cos A$$

$$BD=h_b=c\cdot\sin A$$

$$\angle ABD=90^\circ-A.$$

解直角三角形 DBC，得：

$$\operatorname{tg} b_2=\operatorname{tg} a\cos C,$$

向等式兩邊先各加減 $\operatorname{tg} a$，得：

$$\operatorname{tg} b_2+\operatorname{tg} a=\operatorname{tg} a\,(1+\cos C),$$

$$\operatorname{tg} b_2-\operatorname{tg} a=\operatorname{tg} a\,(\cos C-1).$$

用第一式兩邊除第二式兩邊，得：

$$\frac{\sin(b_2-a)}{\sin(b_2+a)}=\frac{-\sin^2\dfrac{C}{2}}{\cos^2\dfrac{C}{2}}=-\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}.$$

因爲角 C 很小，所以

$$\sin(b_2-a)=(b_2-a)\sin 1'',$$

$$\sin(b_2+a)=\sin 2a,$$

並且
$$\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{C^2}{4}\sin^2 1'';$$

因而，
$$(a-b_2)=\frac{C^2}{4}\sin^2 1''\sin 2a.$$

從同一三角形 DBC 有:

$$\sin h_b=\sin a\sin C;$$

或者鑑於 h_b 和 C 都很小，因而

$$h_b=C\sin a.$$

用 b 代 a, 在同樣精確度下得:

$$k_b=C\sin b.$$

利用導出的公式，很容易求得初等三角形所有的元素。在推證以上導出的公式時我們利用方程式:

$$\sin x''=x''\sin 1''$$

$$\operatorname{tg} x''=x''\sin 1''$$

$$\cos x''=1.$$

許可利用這些公式的限度，視要求於計算的精確度而定。例如，假設許可的角的差誤 $x''=0''.01$, 則在按正弦計算時角的限度 x 應當是 $0°.4$, 而按正切計算時 x 是 $0°.3$; 假設要求的精確度 $x''=0''.1$, 則按正弦計算時 x 是 $0°.8$, 按正切計算時是 $0°.6$; 假設要求的精確度是 $1''$, 則按正弦計算時 x 是 $1°.7$, 按正切計算時是 $1°.4$ 並依此類推。

附　　錄

第一編 "球面幾何"的例題和習題

1. 作圖例題

1. 已知大圓弧 AB 端點的坐標爲

$$\varphi_A=15°,\ \lambda_A=14°;\ \varphi_B=12°30',\ \lambda_B=73°;$$

求其極P 的坐標 φ 和 λ。

2. 已知大圓弧 AB 端點的坐標爲

$$\varphi_A=25°,\ \lambda_A=0°;\ \varphi_B=30°,\ \lambda_B=129°;$$

求作其中垂線。

3. 試自點 $C(\varphi_C=50°,\ \lambda_C=123°)$ 向大圓弧 AB 作垂線,已知

$$\varphi_A=60°,\ \lambda_A=6°;\ \varphi_B=17°,\ \lambda_B=80°。$$

4. 已知大圓弧 AB 端點的坐標

$$A(\varphi_A=30°,\ \lambda_A=0°);\ B(\varphi_B=47°,\ \lambda_B=80°);$$

求線段 AB 和 BA 的方位角。

解答: $\alpha_{AB}=51°$; $\alpha_{BA}=279°$。

5. 試通過點 $A(\varphi_A=30°,\ \lambda_A=40°)$ 作大圓弧,使 $\alpha=65°$。

6. 試通過點 $A(\varphi_A=30°,\ \lambda_A=35°)$ 作倖線。

7. 已知球面三角形 ABC 的頂點坐標爲

$$\varphi_A=36°,\ \lambda_A=10°;\ \varphi_B=49°,\ \lambda_B=79°;$$

$$\varphi_C=77°,\ \lambda_C=35°;$$

求邊長和角。

解答: $a=34°,\ b=43°,\ c=51°$;

$A=46°,\ B=61°,\ C=87°$。

8. 已知下列各元素，求作球面直角三角形：

已	知	解	答	
b	c	a	B	C
60°30′	59°	76°30′	67°	61°30′
50°	53°	67°	56°	60°
57°	99°	95°	57°30′	97°30′
108°	39°	104°	101°30′	40°30′

9. 已知下列各元素，求作球面直角三角形：

已	知	解	答	
a	B	b	c	C
127°30′	21°	16°30′	129°30′	103°
120°30′	44°55′	38°40′	130°	117°
115°	98°30′	116°30′	17°30′	19°
56°	59°	45°	38°	47°30′

10. 已知下列各元素，求作球面直角三角形：

a) $b=116°, c=139°$.

解答：$A=124°, B=131°$; $C=147°$;

б) $A=76°30', C=56°30'$.

解答：$B=115°$, $b=111°$, $c=59°$;

в) $c=105°, B=76°$.

解答：$A=86°, C=105°30'$; $b=76°30$.

11. 已知下列各元素，求作球面任意三角形：

a) $A=59°30', B=77°, c=34°30$.

解答：$a=37°, b=43°, C=54°30'$;

б) $A=90°30', B=73°, c=18°$.

解答：$a=48°30'$, $b=46°$, $C=24°$；

в） $a=38°$, $b=75°$, $C=52°$.

解答：$A=36°30'$, $B=112°$, $c=55°30'$；

г） $a=96°$, $b=80°$, $C=100°$.

解答：$A=94°$, $B=81°$, $c=101°$；

д） $a=79°30'$, $b=65°30'$, $c=38°$.

解答：$A=105°$, $B=63°$, $C=37°$；

е） $a=100°$, $b=80°$, $c=60°$.

解答：$A=108°$, $B=72°$, $C=57°$；

ж） $A=62°$, $B=54°30'$, $C=70°$.

解答：$a=30°$, $b=27°30'$, $c=32°$；

з） $A=83°$, $B=65°$, $C=44°30'$.

解答：$a=48°$, $b=43°$, $c=32°$.

12. 已知下列各元素，求球面三角形的高：

а） $a=36°$, $b=48°$, $c=56°$.

解答：$h_a=48°$, $h_b=36°$, $h_c=32°$；

б） $A=104°$, $B=65°30'$, $C=58°30'$.

解答：$h_a=53°$, $h_b=58°$, $h_c=65°30'$.

13. 已知下列各元素，求三角形外接圓和內切圓的半徑：

а） $a=39°$, $b=55°$, $c=46°$.

解答：$r_1=28°$, $r_2=13°$；

б） $A=61°$, $B=66°$, $C=56°$.

解答：$r_1=12°$, $r_2=6°$.

2. 計算例題和習題

14. 化下列各量爲弧度：

а） $25°16'19''$.

解答：$L=0.441078$；

б）$238^\circ\ 12'00''.2$.

解答：$L=4.157375$.

в）$115^\circ 10'48''$.

解答：$L=2.010271$；

г）$269^\circ 31'20''$.

解答：$L=4.704502$.

15. 化下列各量爲度：

а）$L=3.273213$.

解答：$187^\circ 32'28''.6$；

б）$L=0.584303$.

解答：$33^\circ 28'41''$；

в）$L=1.000000$.

解答：$57^\circ 17'45''$；

г）$L=2.426019$.

解答：$139^\circ 00'02''$.

16. 已知下列各中心角，求其所對地球（$R=6370$ 千米）大圓弧的長度：

а）$\alpha=40^\circ 10'$.

解答：4465.6 千米；

б）$\alpha=42^\circ 54'50''$.

解答：4776.1 千米；

в）$\alpha=160^\circ 08'35''$.

解答：17804.6 千米；

г）$\alpha=208^\circ 41'17''$.

解答：23201.4 千米。

17. 已知下列各地球（$R=6370$ 千米）大圓弧的長度 L，求其所對中

心角:

а) $L=20.31$ 千米.

解答: $\alpha=10°10'57''$;

б) $L=3562$ 千米.

解答: $\alpha=32°02'18''$;

в) $L=10000$ 千米.

解答: $\alpha=89°56'47''$;

г) $L=23286$ 千米.

解答: $\alpha=209°25'41''$.

18. 已知緯線的緯度 φ 及緯線弧兩端經度之差 λ, 求緯線弧的長度 l ($R=6370$ 千米):

$\lambda=1°10'15''$; $\varphi=55°45'0''$; 解答: $l=73.26$ 千米

$\lambda=25°17'19''$; $\varphi=56°50'40''$; 解答: $l=1537.66$ 千米

$\lambda=5°20'30''$; $\varphi=89°10'10''$; 解答: $l=8.64$ 千米

19. 已知緯線的緯度 φ 及緯線弧的長度 l, 求緯線弧兩端經度之差 λ ($R=6370$千米):

$l=102.5$ 千米; $\varphi=55°45'$; 解答: $\lambda=1°38'17''$

$l=2376.5$ 千米; $\varphi=50°0'$; 解答: $\lambda=33°15'17''$

$l=1000.0$ 千米; $\varphi=53°25'$; 解答: $\lambda=15°5'31''$

20. 已知緯度 φ 處緯線弧 AB 的長度 l, 求通過此弧兩端的經線所夾赤道弧的長度:

$l=100.0$; $\varphi=56°17'$; 解答: $L=180.2$ 千米

$l=1756.5$; $\varphi=60°2'$; 解答: $L=3516.5$ 千米

$l=2956.3$; $\varphi=51°1'$; 解答: $L=4699.3$ 千米

21. 求莫斯科 ($\varphi=55°45'$) 到北極的距離 ($R=6370$ 千米)。

解答: 3807.8 千米。

22. 已知三角,求球面三角形 ABC 的球面剩餘:

$A=30°17'32''$；$B=90°20'13''$；$C=73°32'0''$；　解答：$\varepsilon=6°56'20''$

$A=90°40'16''$；$B=71°0'13''$；$C=43°4'39''$；　解答：$\varepsilon=24°45'8''$

$A=116°8'4''$；$B=60°7'25''$；$C=69°45'17''$；解答：$\varepsilon=66°0'46''$

$A=123°15'6''$；$B=50°0'20''$；$C=84°7'18''$；　解答：$\varepsilon=77°22'44''$

23. 已知在緯度 φ 處夾於二角形兩邊中間的緯線弧的長度 l，求二角形的面積:

$l=200$ 千米；$\varphi=30°0'$；　解答：2942178 千米²

$l=57$ 千米；　$\varphi=60°10'$；解答：1333323 千米²

$l=111$ 千米；$\varphi=55°45'$；解答：2512665 千米²

24. 已知下列各元素，求球面三角的面積:

A	B	C	R	
$46°29'4''$；	$69°55'23''$；	$74°41'46''$；	10 米；	解答：$S=193794$ 米²
$80°17'13''$；	$100°17'10''$；	$32°52'12''$；	6370 千米；	解答：$S=23448290$ 千米²
$37°12'17''$；	$120°17'37''$；	$33°17'19''$；	100 千米；	解答：$S=1941$ 厘米²

25. 已知球面三角形的各角及其面積，求球的半徑:

$S=288.39$ 任意單位；$A=49°19'32''$；$B=81°30'12''$；$C=53°27'56''$

解答：$R=620.3$ 單位。

$S=729843$ 任意單位；$A=52°9'47''$；$B=74°27'19''$；$C=84°52'56'$

解答：1170.9 單位。

3. 圖解分析例題

26. 求從斯維爾德洛夫斯克（$\varphi=56°50°, \lambda=60°35'$）到莫斯科（$\varphi=55°45', \lambda=37°30'$）的最短距離（地球半徑 $R=6370$ 千米）。

解答：$l=1420$ 千米。

27. 設莫斯科的緯度爲 $55°46'4''$，列寧格勒的緯度爲 $59°56'$，二者

經度之差爲 7°13′；求兩地間的距離。

解答：$l=630$ 千米。

28. 求從列寧格勒（$\varphi=59°56'$）到緯度 56°52′ 處一點 N 的距離，設已知二者經度之差爲 7°13′ 及地球半徑爲 6370 千米。

解答：$l=470$ 千米。

第二編　"球面三角"的例題和習題

4. 直角三角形解法例題

29. 試根據兩已知直角邊解直角三角形：

已知		解答		
b	c	a	B	C
48°27′21″	33°07′37″	56°15′42″	64°09′41″	41°05′05″
51°02′48″	12°16′42″	52°15′54″	80°14′41″	15°38′07″
48°54′54″	12°16′42″	50°02′53″	79°29′44″	16°06′22″
50°00′00″	52°55′26″	67°12′00″	56°11′56″	59°56′10″
2°44′00″	11°38′11″	11°56′56″	13°19′00″	76°56′43″
43°18′02″	118°53′58″	110°35′31″	47°06′28″	110°44′10″
75°18′12″	118°09′21″	96°52′32″	76°58′46″	117°22′14″
47°15′00″	56°25′00″	67°56′48″	52°24′06″	64°00′30″

30. 試根據一直角邊及其一隣角解球面直角三角形：

已知		解答		
b	C	a	c	B
54°06′20″	73°11′06″	78°11′22″	69°33′00″	55°53′30″
60°38′07″	40°56′23″	66°58′25″	37°05′27″	71°15′26″
50°00′00″	59°56′10″	67°12′00″	52°55′26″	56°11′56″
28°07′10″	8°19′25″	28°22′20″	3°56′41″	82°39′53″
64°30′09″	132°44′57″	107°56′18″	135°40′57″	71°34′20″
37°52′18″	49°21′45″	50°03′22″	35°34′35″	53°12′00″
118°12′48″	55°30′20″	106°54′03″	52°03′14″	112°55′52″
74°21′53″	52°05′54″	80°14′41″	51°02′48″	77°43′18″

31. 已知斜邊及其一隣角，試解球面直角三角形：

已知		解答		
a	B	b	c	C
40°33′40″	65°58′47″	36°26′28″	19°12′39″	30°23′50″
127°32′26″	21°08′18″	16°36′55″	129°29′05″	103°15′23″
120°38′43″	44°54′44″	37°24′11″	129°54′56″	116°56′17″
115°17′20″	98°28′30″	116°34′57″	17°19′29″	19°13′50″
60°21′19″	72°24′40″	55°56′32″	27°58′02″	32°39′23″
87°16′00″	78°21′49″	78°03′04″	76°41′00″	76°57′43″
44°44′18″	52°05′54″	33°44′18″	31°19′47″	47°37′21″
60°22′25″	68°12′58″	53°49′22″	33°07′37″	38°57′12″

32. 已知兩角，試解球面直角三角形：

已知		解答		
B	C	a	b	c
58°27′40″	53°43′14″	63°13′29″	49°32′52″	46°01′46″
32°14′03″	64°59′40″	42°17′45″	21°02′00″	37°34′48″
42°38′51″	63°13′22″	56°46′49″	34°31′27″	48°19′04″
11°56′56″	87°16′00″	76°57′43″	11°38′11″	76°41′00″
77°43′18″	52°05′54″	80°14′41″	74°21′53″	51°02′48″
74°30′00″	66°20′00″	83°01′04″	73°02′12″	65°22′56″
48°12′47″	52°30′00″	46°41′21″	32°51′10″	35°15′33″
13°19′00″	87°16′00″	78°21′49″	13°02′17″	78°03′04″

33. 已知斜邊及一直角邊，試解球面直角三角形：

已知		解答		
a	b	C	B	c
61°07′08″	33°18′17″	68°45′09″	38°50′04″	54°41′47″
32°08′00″	23°50′48″	45°16′20″	49°28′29″	22°12′00″
64°03′10″	40°04′16″	65°50′14″	45°43′02″	55°07′35″
107°17′00″	143°12′03″	76°32′25″	141°08′45″	68°13′15″
83°01′04″	73°02′12″	66°20′00″	74°30′00″	65°22′56″
58°40′13″	45°15′42″	54°05′54″	56°15′42″	42°22′39″
78°21′49″	13°02′17″	87°16′00″	13°19′00″	78°03′04″

34. 已知一直角邊及其對角，試解球面直角三角形：

已知		解答		
b	B	a	c	C
29°31′40″	60°28′05″	34°30′07″ 145°29′53″	18°42′58″ 161°17′02″	34°30′20″ 145°29′40″
38°29′00″	55°34′00″	48°58′48″ 131°01′12″	33°01′24″ 146°58′36″	46°14′48″ 133°45′12″
35°03′00″	49°07′00″	49°25′44″ 130°34′16″	37°23′43″ 142°36′17″	53°05′00″ 126°55′00″
108°41′36″	102°35′40″	103°55′40″ 76°04′20″	41°19′28″ 138°40′32″	42°52′09″ 137°07′51″
4°33′27″	71°26′24″	4°48′31″ 175°11′29″	1°32′06″ 178°27′54″	18°38′15″ 161°21′45″

已知		解答		
b	B	a	c	C
162°37′18″	111°17′43″	161°18′08″ 18°41′52″	7°00′26″ 172°59′34″	22°22′04″ 157°37′56″
51°02′48″	80°14′41″	52°05′54″ 127°54′06″	12°16′42″ 167°43′18″	15°38′07″ 164°21′53″
108°41′36″	102°35′40″	103°55′40″ 76°04′20″	41°19′28″ 138°40′32″	42°52′03″ 137°07′57″

5. 直邊三角形解法例題

35. 試根據下列條件解球面直邊三角形：

$b=115°50'19''$；$c=138°54'54''$；$C=146°52'27''$

解答：$A=123°44'16''$；$B=131°32'39''$.

$A=76°24'42''$；$C=56°25'10''$；$B=115°8'11''$

解答：$b=111°20'58''$；$c=58°59'30''$.

$B=39°19'35''$；$C=50°59'2''$；$A=119°8'31''$

解答：$b=46°31'0''$；$c=62°49'12''$.

$c=105°0'0''$；$B=76°0'0''$；$C=105°26'36''$

解答：$b=76°29'10''$；$A=86°18'28''$.

$c=32°7'15''$；$A=122°19'46''$；$C=26°42'0''$

解答：$b=71°26'20''$；$B=53°13'46''$.

$c=58°26'28''$；$C=49°43'18''$；$B_1=133°32'45''$

解答：$b=125°56'53''$；$A_1=63°33'0''$.

$b_2=54°3'7''$；$A_2=116°27'0''$；$B_2=46°27'15''$.

6. 球面任意三角形解法例題

36. 試根據三邊解球面任意三角形：

1）$a=34°12'48''$；$b=42°55'12''$；$c=51°2'39''$

解答：$A=46°11'56''$；$B=60°56'25'$；$C=86°32'08''$.

2）$a=59°46'20''$；$b=83°17'38''$；$c=96°4'22''$

解答：$A=58°30'52''$；$B=78°35'7'$；$C=101°3'28''$.

3）$a=82°11'17''$；$b=64°19'21''$；$c=31°31'30''$

解答：$A=119°41'40''$；$B=52°12'30''$；$C=27°16''$.

4）$a=69°34'26''$；$b=57°49'22''$；$c=114°16'14''$

解答：$A=42°36'55''$；$B37°42'12''$；$C=138°48'12''$.

5）$a=60°31'42''$；$b=117°28'19''$；$c=78°42'23''$

解答：$A=47°59'13''$；$B=130°46'58''$；$C=56°48'52''$.

6）$a=171°18'12''$；$b=54°7'16''$；$c=133°9'24''$

解答：$A=173°48'52''$；$B=144°44'0''$；$C=148°40'48''$.

7）$a=42°18'$；$b=17°12'$；$c=58°30'$

解答：$A=45°28'$；$B=94°48'$；$C=64°32'$.

8）$a=79°33'20''$；$b=65°28'20''$；$c=37°51'40''$

解答：$A=105°11'38''$；$B=63°13'16''$；$C=37°2'58''$.

37．試根據三角解球面任意三角形：

1） $A=62°5'40''$；$B=54°36'10''$；$C=70°14'30''$

解答：$a=30°4'56''$；$b=27°32'22''$；$c=32°15'48''$.

2） $A=90°40'16''$；$B=71°0'13''$；$C=43°4'39''$

解答：$a=69°30'36''$；$b=62°20'54''$；$c=39°46'43''$.

3） $A=116°8'4''$；$B=60°7'25''$；$C=69°45'17''$

解答：$a=109°14'32''$；$b=65°46'4''$；$c=80°38'18''$.

4） $A=123°15'6''$；$B=50°0'20''$；$C=84°7'18''$

解答：$a=129°16'54''$；$b=45°9'46''$；$c=112°58'4''$.

5） $A=40°0'48''$；$B=95°2'16''$；$C=73°4'34''$

解答：$a=39°1'40''$；$b=77°18'34''$；$c=69°32'35''$.

6） $A=47°59'12''$；$B=130°46'58''$；$C=56°48'52''$

解答：$a=60°31'41''$；$b=117°28'18''$；$c=78°42'26''$.

7） $A=148°14'$；$B=130°18'$；$C=120°12'$

解答：$a=142°47$；$b=118°48'$；$c=83°17'$.

8） $A=49°54'13''$；$B=108°30'47''$；$C=44°50'42''$

解答：$a=51°12'26''$；$b=75°3'10''$；$c=45°55'52''$.

38．已知兩邊及其夾角，試解球面任意三角形：

1） $a=48°12'36''$；$b=37°30'42''$；$C=55°5'54''$

解答：$c=37°58'0''$；$A=83°42'39''$；$B=54°16'13''$.

2） $a=104°23'15''$；$b=67°4'28''$；$C=36°17'49''$

解答：$c=51°31'20''$；$A=132°54'22''$；$B=44°8'36''$.

3） $a=105°40'0''$；$c=62°21'14''$；$B=70°56'10''$

解答：$b=81°10'58''$；$A=112°56'18''$；$C=57°54'54''$.

4） $b=35°0'28''$；$c=56°1'25''$；$A=118°19'26''$

解答：$a=76°34'55''$；$B=31°16'39''$；$C=48°37'53''$.

5)　$a=40°28'36''$; $b=110°18'32''$; $C=56°40'54''$

解答: $c=85°57'50''$; $A=32°56'31''$; $B=128°13'15''$.

6)　$a=38°15'6''$; $b=75°10'8''$; $C=52°14'16''$

解答: $c=55°25'20''$; $A=36°28'26''$; $B=111°50'54''$.

7)　$a=118°31'$; $b=50°20'$; $C=100°40'$

解答: $c=115°28'$; $A=106°59'$; $B=56°55'$

8)　$b=50°10'30''$; $c=40°0'10''$; $A=121°36'20''$

解答: $a=76°56'$; $B=42°15'13''$; $C=34°15'36''$.

39. 已知兩角及其夾邊,試解球面任意三角形:

1)　$a=64°2'41''$; $B=22°48'9''$; $C=106°43'40''$

解答: $b=22°40'34''$; $c=72°17'58''$; $A=64°40'30''$.

2)　$a=100°0'0''$; $B=39°4'28''$; $C=57°46'10''$

解答: $b=46°3'13''$; $c=75°4'7''$; $A=120°26'21''$.

3)　$b=22°4'47''$; $A=74°32'10''$; $C=61°9'50''$

解答: $a=28°36'22''$; $c=25°47'46$; $B=49°10'18''$.

4)　$c=118°50'0''$; $A=49°18'0''$; $B=61°40'0''$

解答: $a=58°54'43''$; $b=83°51'23''$; $C=129°8'49''$.

5)　$c=34°29'34''$; $A=59°32'16''$; $B=77°18'20''$

解答: $a=36°52'33''$; $b=42°46'41''$; $C=54°26'00''$.

6)　$c=68°12'58''$; $A=56°52'23''$; $B=76°0'32''$

解答: $a=52°5'54''$; $b=66°6'4''$; $C=80°14'41''$.

7)　$c=68°50'$; $A=114°35'$; $B=30°19'$

解答: $a=85°3'$; $b=33°34'$; $C=58°20'$.

8)　$a=66°32'$; $B=111°32'$; $C=75°51'$

解答: $b=107°16'$; $c=84°30'$; $A=63°19$.

40. 已知兩邊及其一的對角,試解球面任意三角形:

1)　$a=47°4'46''$; $b=36°39'51''$; $A=56°16'50''$

解答: $c=60°46'8''$; $B=42°42'21''$; $C=97°36'40''$.

2) $a=112°40'26''$; $b=58°27'42''$; $A=98°22'40''$

解答: $c=122°27'20''$; $B=66°2'20''$; $C=115°12'52''$.

3) $a=82°33'51''$; $b=27°16'9''$; $B=26°31'57''$

解答: $c_1=89°12'24''$; $A_1=75°11'15''$; $C_1=34°52'5''$.

4) $a=54°18'16''$; $c=97°12'25''$; $A=51°18'13''$

解答: $b_1=124°12'28''$; $B_1=127°22'0''$; $C_1=72°26'45''$

$b_2=78°39'46''$; $B_2=70°26'18''$; $C_2=107°33'15''$.

5) $a=63°22'30''$; $b=81°14'20''$; $A=54°39'10''$

解答: $c_1=115°51'2''$; $B_1=64°23'30''$; $C_1=124°48'14''$

$c_2=34°19'0''$; $B_2=115°36'30''$; $C_2=30°57'24''$.

6) $a=57°41'13''$; $b=76°34'42''$; $A=40°23'28''$

解答: $c_1=119°5'18''$; $B_1=48°13'40''$; $C_1=137°55'52''$

$c_2=26°7'8''$; $B_2=131°46'20''$; $C_2=19°43'37''$.

7) $a=66°2'$; $b=108°49'$; $A=64°28'$

解答: $c_1=166°59'$; $B_1=69°11'$; $C_1=167°8'$

$c_2=89°54'$; $B_2=110°49'$; $C_2=81°8'$.

8) $a=113°3$; $b=82°39'$; $A=116°20'$

解答: $B_1=75°1'$; $C_1=70°7'$; $C_1=74°54'$

$B_2=104°59'$; $C_2=138°49'$; $c_2=137°28'$.

41. 已知兩角及其一的對邊,試解球面任意三角形.

1) $a=54°12'28''$; $A=66°10'42'$; $B=41°0'24''$

解答: $b=35°34'37''$; $c=62°25'10''$; $C=91°32'24''$.

2) $b=124°10'48''$; $B=96°48'12''$; $C=46°7'6''$

解答: $a=129°19'41''$; $c=36°54'23''$; $A=111°21'33'$.

3) $a=52°35'25''$; $A=54°42'20''$; $B=81°26'35''$

解答：$b_1=74^\circ14'0''$；$c_1=74^\circ57'51''$；$C_1=82^\circ54'46''$

$b_2=105^\circ46'0''$；$c_2=127^\circ3'4''$；$C_2=124^\circ54'31''$.

4）$b=26^\circ50'14''$；$B=39^\circ37'9''$；$C=69^\circ25'27''$

解答：$a_1=44^\circ21'16''$；$c_1=41^\circ30'52''$；$A=81^\circ2'5''$

$a_2=155^\circ47'40''$；$c_2=138^\circ29'8''$；$A_2=144^\circ36'36''$.

5）$a=61^\circ5'12''$, $A=59^\circ30'40''$；$B=73^\circ13'22''$

解答：$b_1=76^\circ33'0''$；$c_1=92^\circ55'30''$；$C_1=100^\circ23'23''$

$b_2=103^\circ27'0''$；$c_2=142^\circ49'48''$；$C_2=143^\circ30'11''$.

6）$a=57^\circ17'28'$；$A=60^\circ57'33''$；$B=72^\circ40'32''$

解答：$b_1=66^\circ44'47''$；$c_1=73^\circ21'40''$；$C_1=84^\circ34'50''$

$b_2=113^\circ15'13''$；$e_2=156^\circ23'30''$；$C_2=155^\circ24'40''$

7）$a=51^\circ24'$；$A=50^\circ32'$；$B=109^\circ51'$

解答：$b_1=57^\circ36'$；$c_1=14^\circ45$；$C_1=16^\circ28'$.

$b_2=122^\circ24'$；$c_2=119^\circ11'$；$C_2=103^\circ25'$.

8）$b=44^\circ55'5''$；$A=152^\circ3'10''$；$B=100^\circ2'4''$

解答：$a=160^\circ21'47''$；$c=142^\circ10'56''$；$C=169^\circ21'35''$.

7. 球面三角形解法各種情形的例題

42. 設已知下列元素，試計算球面三角形的高：

1）$a=36^\circ$；$b=48^\circ$；$c=56^\circ$

解答：$h_a=47^\circ56'44''$；$h_b=35^\circ57'53''$；$h_c=31^\circ45'54'$.

2）$A=104^\circ14'8''$；$B=65^\circ39'20''$；$C=58^\circ25'12''$

解答：$h_a=53^\circ8'47''$；$h_b=58^\circ21'0''$；$h_c=65^\circ33'48''$.

3）$a=39^\circ15'40''$；$b=56^\circ49'10''$；$C=64^\circ5'20''$

解答：$h_a=48^\circ50'6''$；$h_b=34^\circ41'50''$；$h_c=29^\circ5'38''$.

43. 設已知下列元素，試計算外接圓半徑（r_2）和內切圓半徑（r_1）：

1）$a=39^\circ19'40''$；$b=55^\circ2'20''$；$c=45^\circ57'16''$

解答：$r_1=13°34'20''$；$r_2=28°7'37''$.

2） $A=61°0'52''$；$B=66°11'0''$；$C=55°56'29''$

解答：$r_1=5°53'36''$；$r_2=11°45'24''$.

3） $a=116°4'26''$；$b=74°47'54''$；$C=65°44'10''$

解答：$r_1=28°33'46''$；$r_2=58°6'15''$.

44.

1） $a=72°15\,25'$；$h_a=34°40'50''$；$A=55°7'15''$

解答：$b=95°35'58''$；$c=41°35'18''$；$B=120°59'38''$；$C=34°52'12''$.

2） $a=41°5'20''$；$r_2=30°$；$A=45°25'30''$.

解答：$b=55°14'38''$；$c=22°55'58''$；$B=118°57'21''$；$C=24°31'13''$.

3） $a=53°0'$；$r_1=9°30'$；$A=102°0'$

解答：$b=42°9'26''$；$c=26°25'9''$；$B=55°17'15''$；$C=33°1'15''$.

45. 已知地面上三角形的三邊分別爲 32, 43 和 53 千米；取地球半徑爲 6400 千米，試計算其球面剩餘 ε。

解答：$\varepsilon=3''.46$.

46. 已知地面上等邊三角形的球面剩餘爲 1°，取地球半徑爲 6370 仟米，求其邊長。

47. 試解其中一邊和其餘兩邊相比很小的球面三角形：

$$b=40°0'0'',\ A=50°0'0'',\ c=0°48'6''.$$

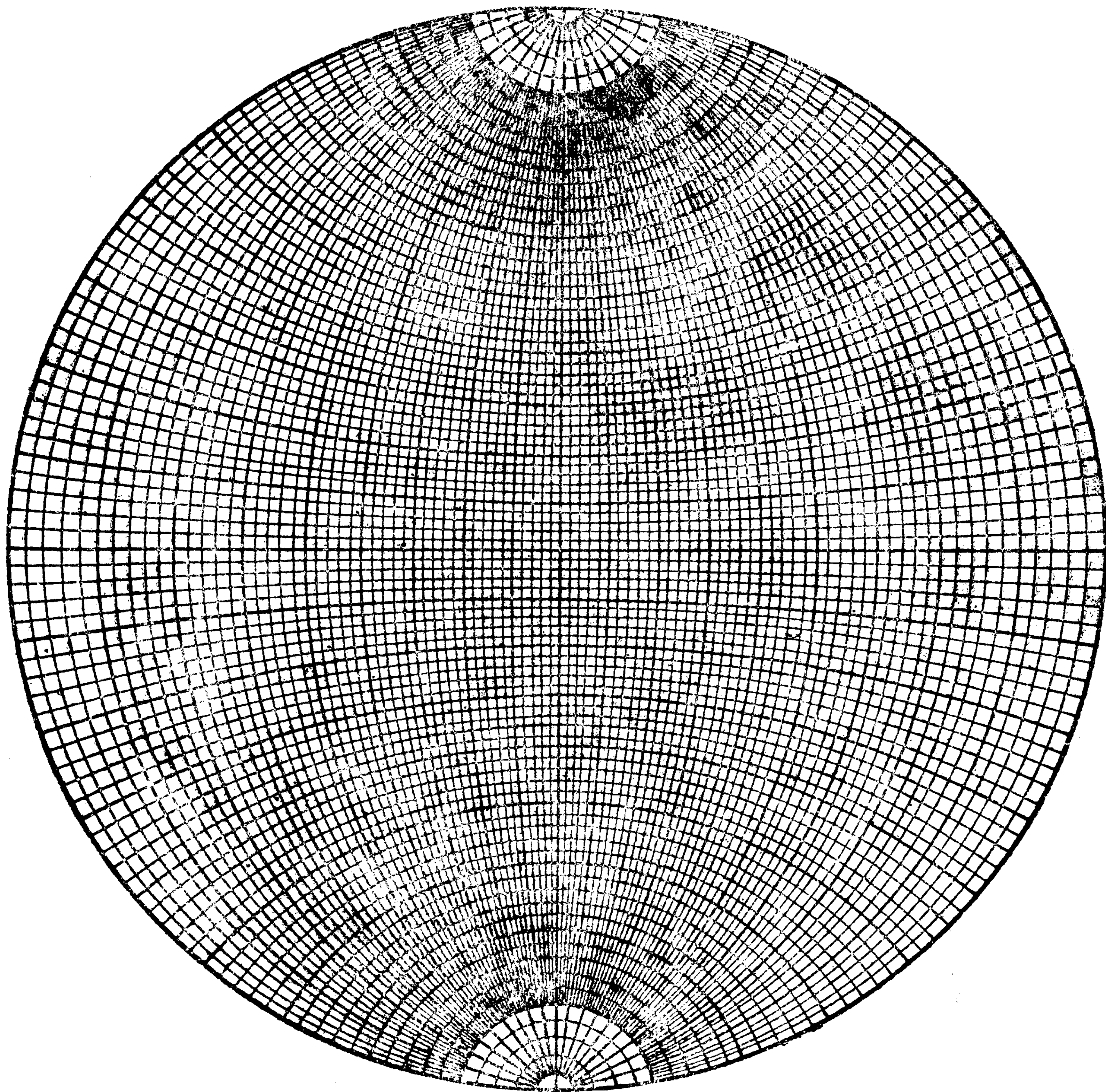
解答：$C=0°57'57''$；$a=40°0'14''$；$B=129°15'27''$.

48. 試解初等球面三角形，其中 $c=3'$, $C=4'$, $A=40°$。

解答：$a=28°49'21''$, $b=28°51'39''$.

49. 試解初等球面直角三角形，其中斜邊 $a=1°0'0'$，銳角 $C==45°0'00'$。

解答：$b=0°42'25'.7$；$c=0°42\,25''.5$；$B=45°0'15''.7$.



製圖網



書號 51116

定價 ¥6,200